



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**VÝPOČETNÍ NÁSTROJ PRO DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVOU  
ANALÝZU MECHANICKY ZATÍŽENÉ KRUHOVÉ A  
MEZIKRUHOVÉ DESKY**

COMPUTATIONAL TOOL FOR A STRESS-STRAIN ANALYSIS OF THE MECHANICALLY LOADED  
CIRCULAR AND ANNULAR PLATE

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Jakub Dohnal**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.**

**BRNO 2020**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Student: **Jakub Dohnal**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.**  
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Výpočetní nástroj pro deformačně–napět'ovou analýzu mechanicky zatížené kruhové a mezikruhové desky**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Hlavní náplní práce je vytvoření analyticko–numerického nástroje pro výpočet deformačně napět'ové odezvy mechanicky zatížené kruhové a mezikruhové desky, řešené v rámci předmětu Pružnost a Pevnost II a zatížené různými okrajovými podmínkami. Nástroj bude vytvořen v některém z dostupných matematických SW, aby jej bylo možné zpřístupnit i pro studenty bakalářského studia jako výukovou pomůcku ve výše uvedeném předmětu. Vytvořený program by měl mít alespoň nějaké základní grafické rozhraní pro jednodušší zadávání vstupních parametrů řešené úlohy. Cílem práce bude rovněž porovnání výstupů vytvořeného analytického modelu s numerickým řešením na bázi metody konečných prvků a na základě tohoto porovnání definovat případná omezení analytického modelu a kvantifikovat jeho odchylky od numerického řešení.

**Cíle bakalářské práce:**

- 1) V úvodní části práce zmapovat různé přístupy pro řešení deformačně napěťové odezvy kruhových i nekruhových desek.
- 2) Ve zvoleném matematickém SW naprogramovat výpočet deformačně–napěťové odezvy kruhové/mezikruhové desky na různé mechanické zatížení (okrajové podmínky) a vytvořit základní uživatelské rozhraní pro zadávání vstupních parametrů úlohy a grafické vykreslování výstupů modelu.
- 3) Vytvořit parametrický model kruhové/mezikruhové desky v SW Ansys a provést deformačně napěťovou analýzu se stejnými okrajovými podmínkami jako v analytickém modelu.
- 4) Porovnat výstupy analytického a numerického modelu a analyzovat procentuální rozdíly v řešení mezi oběma přístupy (jak z pohledu deformací desky, tak z pohledu napětí na jejím povrchu) pro různé geometrické parametry desky a aplikované okrajové podmínky.
- 5) Definovat oblast praktické použitelnosti analytického řešení teorie kruhových/mezikruhových desek.

**Seznam doporučené literatury:**

ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., JANÍČEK, P., Mechanika těles - Pružnost a Pevnost II, skripta, Nakladatelství VUT Brno, 1991.

TIMOSHENKO, S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed. New York: McGraw-Hill book company, 1970.

VENTSEL, E. and KRAUTHAMMER, T. Thin Plates and Shells - Theory, Analysis and Applications. New York: Marcel Dekker AG, 2001.

MATLAB – The Language of Technical Computing, MathWorks, Inc., 2000

ANSYS Inc. ANSYS Release 19.2 User's Manual. Pennsylvania: Swanson Analysis Sys. Inc, 2018,

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Bakalářská práce se primárně zabývá vytvořením výpočetního nástroje pro deformačně-napět'ovou analýzu rotačně symetrických kruhových a mezikruhových desek. K tomuto účelu byl použit komerční software MATLAB a jeho součást APP DESIGNER. Program využívá analytických vztahů obecné pružnosti a pevnosti pro řešení diferenciálních rovnic pro několik typů desek a zatížení. Součástí bakalářské práce je rovněž parametrická studie porovnávající výstupy analytického a numerického modelu založeného na metodě konečných prvků, mající za cíl identifikovat praktickou oblast použitelnosti analytického řešení a jeho přesnost pro daný konkrétní případ desky.

## **Klíčová slova**

deska, deformačně-napět'ová analýza, Ansys, Matlab, aplikace, Kirchhoffova teorie

## **Abstract**

The bachelor's thesis primarily deals with the creation of a computational tool for stress-strain analysis of rotationally symmetric circular and intercircular plates. The commercial software MATLAB and its component APP DESIGNER were used for this purpose. The program uses analytical relationships of general solid mechanics to solve differential equations for several types of plates and loads. Part of the bachelor thesis is also a parametric study comparing the outputs of analytical and numerical model based on the finite element method, aimed at identifying the practical application of the analytical solution and its accuracy for a particular case of the plate.

## **Key words**

plate, stress-strain analysis, Ansys, Matlab, app, Kirchhoff's theory



### **Bibliografická citace**

DOHNAL, Jakub. *Výpočetní nástroj pro deformačně-napěťovou analýzu mechanicky zatížené kruhové a mezikruhové desky* [online]. Brno, 2020 [cit. 2020-06-21]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/124323>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce: Ing. Oldřich Ševeček Ph.D.

### **Prohlášení autora**

Tímto prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma **Výpočetní nástroj pro deformačně-napěťovou analýzu mechanicky zatížené kruhové a mezikruhové desky** jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a zdrojů, které jsou v práci citovány a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

V Brně dne 26. června 2020

.....  
Dohnal Jakub





**Poděkování**

Mé poděkování patří Ing. Oldřichu Ševečkovi, Ph.D. za jeho ochotu, trpělivost a odborné rady, které přispěli k vypracování této bakalářské práce.



# Obsah

<b>Úvod</b> .....	1
<b>1. Vymezení obecné pružnosti a pevnosti</b> .....	2
1.1 Napjatost v bodě tělesa.....	2
1.2 Systém rovnic pružnosti a pevnosti.....	3
1.2.1 Rovnice rovnováhy.....	3
1.2.2 Geometrické vztahy.....	3
1.2.3 Podmínky spojitosti deformace .....	5
1.2.4 Konstitutivní vztahy .....	6
<b>2. Rešerše a vymezení problematiky desek</b> .....	9
2.1 Předpoklady tenkostěnnosti desky .....	9
2.2 Kirchhoffova teorie desek .....	9
2.3 Geometrie tělesa .....	10
2.4 Deformace tělesa .....	10
2.5 Napjatost tělesa.....	11
2.6 Rovnice desky .....	11
2.7 Kruhové a mezikruhové desky .....	13
<b>3. Metody pro řešení deformačně-napět'ové odezvy desek</b> .....	16
3.1 Metody pro řešení deformačně-napět'ové odezvy kruhových a mezikruhových desek .....	16
3.1.1 Analytické řešení přímé úlohy pružnosti.....	16
3.2 Metody pro řešení deformačně-napět'ové odezvy nekruhových desek .....	18
3.2.1 Navierova metoda.....	18
3.2.2 Lévyho metoda .....	20
3.3 Metoda konečných prvků .....	22
<b>4. Výpočetní nástroj pro deformačně-napět'ovou analýzu kruhových a mezikruhových desek</b> ..	26
4.1 Schéma programu výpočetního nástroje .....	27
4.2 Ansys v batch módu .....	34
4.2.1 APDL kód pro analýzu desky v SW ANSYS.....	34
<b>5. Porovnání analytického a numerického modelu</b> .....	36
5.1 Vliv průhybu na přesnost analytického modelu .....	37
5.1.1 Analýza kruhové desky typu A1, zatížená tlakem .....	37
5.1.2 Analýza kruhové desky typu A2, zatížená tlakem .....	46
5.1.3 Analýza mezikruhové desky typu A4, zatížená radiálním momentem a liniíovou silou.....	50
5.2 Vliv tloušťky desky na přesnost analytického modelu.....	54
5.2.1 Analýza kruhové desky typu A1, zatížená tlakem .....	54

5.3 Shrnutí výsledků.....	61
<b>6. Závěr.....</b>	<b>62</b>
<b>Seznam použitých zdrojů.....</b>	<b>63</b>
<b>Seznam symbolů, veličin a zkratk .....</b>	<b>66</b>
<b>Seznam obrázků .....</b>	<b>68</b>
<b>Seznam tabulek.....</b>	<b>70</b>
<b>Seznam příloh .....</b>	<b>71</b>

## Úvod

Hlavním cílem bakalářské práce je vytvoření výpočetního nástroje (aplikace) pro deformačně-napěťovou (D-N) analýzu rotačně symetrických kruhových a mezikruhových desek a porovnání jeho výstupů s numerickým řešením založeným na metodě konečných prvků (MKP). Deska je tenkostěnné těleso, jehož střednicová plocha je v nezátíženém stavu rovinná, v deformovaném je prohnutá, z čehož vyplývají i důsledky pro možné její zatížení a vazby. Těleso je typicky zatíženo příčnými silami (kolmé na střednicovou rovinu) a silovými dvojicemi (nejčastěji radiálním momentovým zatížením).

Pro vytvoření výpočetní aplikace bude využit SW MATLAB, konkrétně jeho součást, umožňující práci s grafickým uživatelským rozhraním (GUI). K numerickým výpočtům bude využit konečnoprvkový systém ANSYS. Tento software bude brát v úvahu velké deformace (na rozdíl od analytického modelu) a tím umožní verifikovat přesnost analytického modelu pro danou konfiguraci desky. Uvedený nástroj, využívající analytických vztahů obecné pružnosti a pevnosti, je cílen primárně jako studijní podpora pro výuku předmětu Pružnost a Pevnost II, vyučovaného ve třetím ročníku bakalářského studijního programu na fakultě strojního inženýrství. V rámci tohoto předmětu se z časových důvodů nestihnou kompletně spočítat všechny úlohy s deskami a student je tak ochuzen o nejzajímavější výsledky. Výpočetní nástroj má umožnit jednoduchý a rychlý výpočet zadané úlohy a tím tuto mezeru v předmětu vyplnit.

V první části práce bude vymezena teorie obecné pružnosti a pevnosti tak, aby měl čtenář k dispozici všechny potřebné pojmy a vztahy o deformaci a napjatosti v bodě tělesa. K tomuto účelu budou popsány i základní rovnice obecné pružnosti pevnosti, které jsou pro výpočet deformačně-napěťové odezvy základních těles pružnosti a pevnosti klíčové.

Pro úplnost jsou v práci rozebrány i metody pro výpočet nekruhových (čtvercových a obdélníkových) desek. Analýza takového typu desek vychází z Kirchhoffovy teorie desek, definující vztahy pro obecnou desku. Součástí této kapitoly bude vymezení použitelnosti této teorie. Konkrétní řešení nekruhových desek nebude součástí bakalářské práce ani výpočetní aplikace.

V závěru práce jsou prostřednictvím výpočetní aplikace porovnány řešení analytického a numerického modelu, kde jsou modifikovány různé geometrické a zatěžovací parametry desky a v závislosti na těchto změnách jsou sledovány průměrné absolutní procentuální odchylky uvedených modelů. Tato analýza má za cíl vymežit praktickou použitelnost analytického řešení pro konkrétní geometrické a zatěžovací poměry.

## 1. Vymezení obecné pružnosti a pevnosti

Předmětem této kapitoly bude definování pojmů a vztahů, které jsou nezbytné k řešení základních úloh pružnosti a pevnosti. Náplní těchto úloh je stanovení posuvů, deformací a napjatosti ve všech bodech tělesa zatíženého soustavou silových účinků různého charakteru, vázaného k nějakému rámu a vyrobeného z určitého materiálu. Uvedené vztahy jsou odvozeny v kartézském souřadnicovém systému.

### 1.1 Napjatost v bodě tělesa

*„Napjatost v bodě tělesa je množina obecných napětí ve všech řezech, které lze tímto bodem vést.“ [1]*

K určení napjatosti v takovém bodě stačí znát hodnoty obecných napětí ve třech vzájemně kolmých řezech, které prochází tímto bodem. Průsečnice těchto rovin se označují jako osy kartézského souřadnicového systému  $x, y, z$ . Index obecného napětí  $\vec{f}$  budeme označovat podle normály roviny, ve které tato napětí působí. Každé obecné napětí lze rozložit do směrů os souřadnicového systému pomocí normálových napětí  $\sigma_i$  a smykových napětí  $\tau_{ij}$  následovně [2]:

$$\begin{aligned}\vec{f}_x &= \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}, \\ \vec{f}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}, \\ \vec{f}_z &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

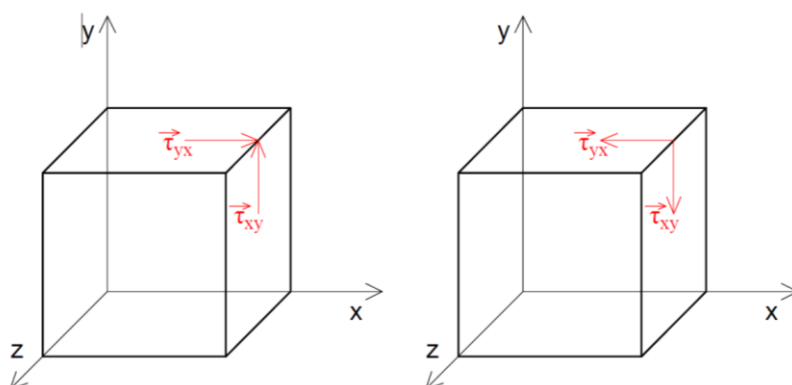
Tato napětí lze sestavit do čtvercové matice, která bude určovat napjatost v bodě tělesa. Nazývá se tenzor napětí  $T_\sigma$ :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.\tag{1.2}$$

Tenzor napětí je symetrická matice, tudíž platí vztah:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}.\tag{1.3}$$

Tato rovnost platí na základě věty o sdruženosti smykových napětí. Ta říká, že smyková napětí, která působí ve vzájemně kolmých řezech kolmo k jejich průsečnici, jsou stejně velká a orientovaná k průsečnici nebo od ní (obr. 1.1).



**Obr. 1.1:** Smyková napětí na dvou elementárních prvcích [2].

Množina napjatostí ve všech bodech tělesa se nazývá napjatost tělesa a závisí na zatížení, tvaru a materiálových charakteristikách vyšetřovaného tělesa. Pokud jsou tenzory napětí ve všech bodech tělesa stejné, jedná se o homogenní napjatost [1].

## 1.2 Systém rovnic pružnosti a pevnosti

Zatížené prostorové těleso lze z pohledu deformačně-napěťové odezvy v každém jeho bodě charakterizovat pomocí 15-ti neznámých parametrů (6 pro napětí, 6 pro přetvoření a 3 pro posuvy). K určení těchto neznámých veličin slouží systém rovnic pružnosti a pevnosti, které budou popsány v následujících podkapitolách.

### 1.2.1 Rovnice rovnováhy

Rovnice rovnováhy vyjadřují podmínky pro dosažení statické rovnováhy v libovolném bodě tělesa. V tomto bodě musí být součet sil ve všech třech směrech roven nule. Na elementární prvek (bod) působí povrchové a objemové zatížení (značí se podle os souřadnicového systému jako  $X, Y, Z$ ). Podmínku rovnováhy ve směru osy  $x$  lze vyjádřit následovně [18]:

$$\begin{aligned} \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Po úpravě a zkrácení elementárním objemem  $dx dy dz$  lze dostat rovnici rovnováhy ve směru osy  $x$ :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0. \quad (1.5)$$

Obdobným způsobem jsou vyjádřeny rovnice rovnováhy pro zbylé osy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

### 1.2.2 Geometrické vztahy

Pokud je těleso zatížené a jako celek se nehýbe, pak se každý bod tohoto tělesa přemísťuje (s výjimkou bodů v místě vazby, osy symetrie apod.). Přemístění libovolného bodu B tělesa je popsáno deformačním posuvem:

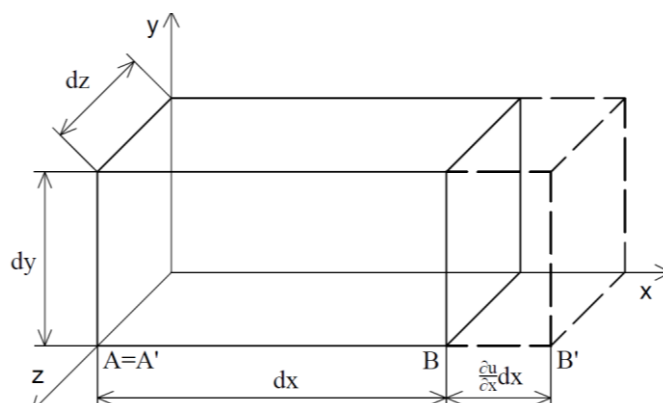
$$u_B = (u, v, w)_B. \quad (1.7)$$

Množina deformačních posuvů  $\{\vec{u}\}$  všech bodů pak určuje deformaci tělesa. Veličiny  $u, v, w$  jsou souřadnice deformačního posuvu [3].

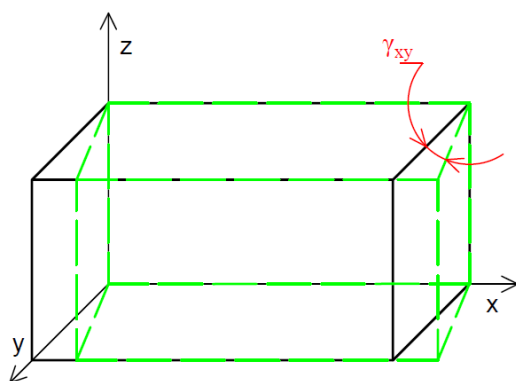
Deformaci tělesa lze snadno popsat na elementárním prvku ve tvaru kvádru (obr. 1.2). Deformace je dána poměrnými změnami délek (délkové přetvoření) tří jejích hran [4]:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{dx \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.8)$$

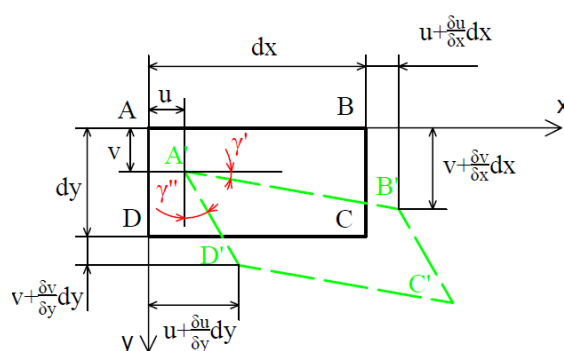
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.9)$$



**Obr. 1.2:** Posuv ve směru osy  $x$  na elementárním kvádru [4].



**Obr. 1.3:** Úhlové přetvoření  $\gamma_{xy}$  na elementárním kvádru [4].



**Obr. 1.4:** Průmět horní stěny elementárního kvádru do roviny  $xy$  [4].

Dalšími veličinami, kterými je popsána deformace tělesa, jsou poměrné změny tří úhlů (úhlové přetvoření) mezi stěnami elementárního prvku. Úhlové přetvoření v rovině  $xy$  lze znázornit také na elementárním kvádru (obr. 1.3). Pokud se horní stěna kvádru promítne do této roviny a zahrnou se posuvy v příslušných směrech, lze si na obr. 1.4 všimnout, že deformace úhlu  $\angle BAD$  na úhel  $\angle B'A'D'$  je dána vztahem [4]:

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma''. \quad (1.10)$$

Z důvodu malých úhlů lze uvažovat, že:

$$\tan(\gamma') = \gamma', \quad \tan(\gamma'') = \gamma''. \quad (1.11)$$

Lze tedy psát:

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}. \quad (1.12)$$

Díky zanedbatelně nízké hodnotě koeficientů  $\frac{\partial v}{\partial x}$  a  $\frac{\partial v}{\partial y}$  lze psát:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Analogicky jsou odvozené rovnice pro zbylá úhlová přetvoření:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.14)$$



$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Obdobně jako v kapitole 1.1, lze i tyto veličiny zapsat do čtvercové matice. Tato matice je tenzor přetvoření  $T_\varepsilon$ :

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Tenzor přetvoření je stejně jako tenzor napětí symetrický, tudíž platí:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \quad (1.16)$$

### 1.2.3 Podmínky spojitosti deformace

Důležitou vlastností zatěžovaného tělesa je spojitá deformovatelnost (těleso si udržuje spojitost i během deformačního procesu). K tomu, aby tato vlastnost byla zachována, musí být splněny tzv. podmínky kompatibility (spojitosti) deformace. Lze pomocí geometrických vztahů vyjádřit 3 podmínky kompatibility a to ve dvou různých tvarech [3].

První skupina podmínek spojitosti deformace vyjadřuje závislost mezi souřadnicemi tenzoru přetvoření  $T_\varepsilon$  v jedné souřadnicové rovině. Odvození vypadá následovně:

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}. \quad (1.17)$$

Součtem těchto rovnic dostáváme:

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.18)$$

Analogickým postupem jsou získány rovnice v ostatních souřadnicových rovinách. Souhrnně jsou zapsány rovnice podmínek spojitosti deformace takto:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta z^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Druhá skupina podmínek spojitosti deformace vyjadřuje závislost mezi souřadnicemi tenzoru přetvoření  $T_\varepsilon$  v různých souřadnicových rovinách. Při odvozování se využívá úhlových přetvoření:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}. \quad (1.22)$$

Od součtu rovnic (1.21) a (1.22) se odečte rovnice (1.20):

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.23)$$

Po derivování rovnice (1.23) podle  $z$  dostáváme:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \quad (1.24)$$

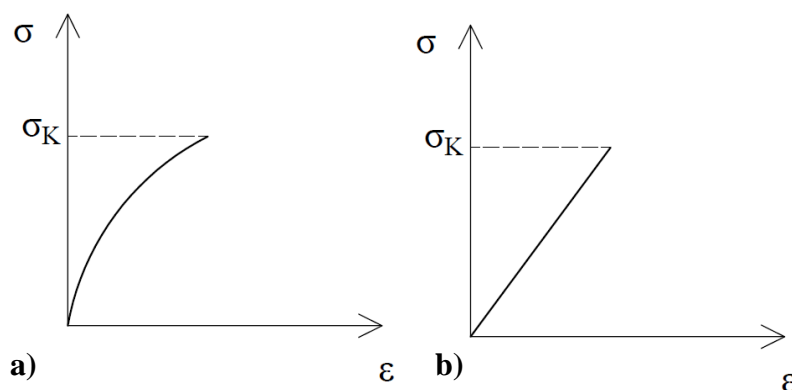
Odvození platí i pro ostatní souřadnicové roviny. Rovnice spojitosti deformace mohou být psány tímto způsobem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

### 1.2.4 Konstitutivní vztahy

Závislost mezi napjatostí a deformací v bodě tělesa vyjadřují konstitutivní vztahy. Obecně je tato závislost v elastické části deformace nelineární (obr. 1.5a), což však výrazně komplikuje řešení úloh pružnosti a pevnosti. Pro drtivou většinu strojírenských materiálů lze v této části nelineární závislost nahradit závislostí lineární. Takovýto materiál se nazývá lineárně pružný (Hookovský) a platí pro něj následující předpoklady [2]:

- Hlavní směry napjatosti a deformace jsou stejné.
- Materiálové charakteristiky jsou určeny modulem pružnosti v tahu  $E$  a Poissonovou konstantou  $\mu$ .
- Závislost mezi souřadnicemi tenzorů napětí a přetvoření je lineární.



**Obr. 1.5:** Tahový diagram s a) nelineární  $\sigma$ - $\varepsilon$  závislostí, b) lineární  $\sigma$ - $\varepsilon$  závislostí [2].

Pro popis konstitutivních vztahů bude použit Hookův zákon.

### Hookův zákon pro jednoosou napjatost

Při realizaci tahové (resp. tlakové) zkoušky je jedinou nenulovou složkou tenzoru napětí  $T_\sigma$  napětí v podélném směru  $\sigma_x$ . Hookův zákon pro jednoosou napjatost pak lze psát takto [2]:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (1.26)$$

Jelikož při tahové (resp. tlakové) zkoušce dochází i ke změně příčných rozměrů, musí být uvažovány i zbylé složky tenzoru přetvoření  $T_\varepsilon$ . Lze je vyjádřit tímto způsobem:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x. \quad (1.27)$$

Pro smykové napětí  $\tau$  lze odvodit vztah:

$$\tau = G \gamma, \quad (1.28)$$

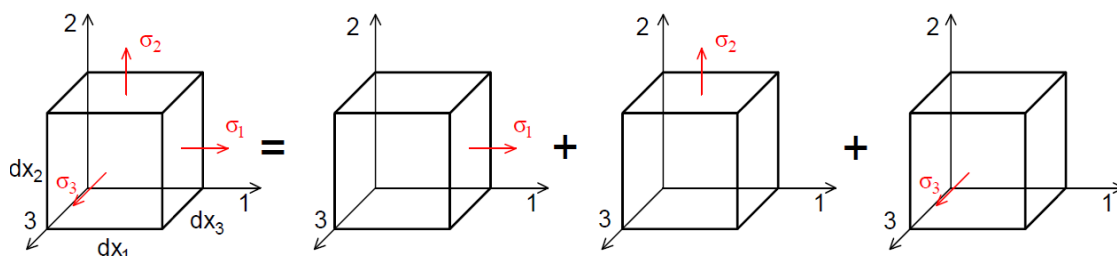
kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku, který lze vyjádřit následovně:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (1.29)$$

### Zobecněný Hookův zákon

Zobecněný Hookův zákon bude odvozen na trojnásobně elementárním prvku (obr. 1.8), kde souřadnicové osy jsou hlavními směry napjatosti a deformace, souřadnicové roviny jsou rovinami hlavními. Při deformaci dochází ke změně objemu. Podíl této změny  $\Delta V$  vůči původnímu objemu  $V$  se nazývá poměrná změna objemu a lze ji zapsat v tomto tvaru [3]:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \frac{dx'_1 dx'_2 dx'_3 - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \quad (1.30)$$



**Obr. 1.6:** Elementární prvek a princip superpozice [3].

Při využití vztahu pro poměrnou deformaci

$$\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx}, \quad (1.31)$$

lze dostat rovnici (1.30) ve tvaru:

$$e = \frac{dx_1(1 + \varepsilon_1)dx_2(1 + \varepsilon_2)dx_3(1 + \varepsilon_3) - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3}. \quad (1.32)$$

Po zkrácení členů  $dx_1, dx_2, dx_3$  a po dalších úpravách lze získat vztah:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (1.33)$$

který platí za předpokladu malých deformací.

Pokud bude použit princip superpozice dle obr. 1.6 a zároveň budou využity vztahy (1.26, 1.27), lze získat vztahy pro hlavní napětí v osách souřadnicového systému:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (1.34a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (1.34b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \quad (1.34c)$$

Jestliže jsou vztahy (1.34a, b, c) dosazeny do rovnice (1.33), lze získat po menších úpravách rovnici:

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1.35)$$

Rovnici (1.35) upravíme do vhodnějšího tvaru, který bude později využit:

$$\sigma_y + \sigma_z = \frac{eE}{1 - 2\mu} - \sigma_x. \quad (1.36)$$

U deformační varianty řešení úlohy pružnosti jsou využity vztahy inverzní k rovnicím (1.34a, b, c). Odvození bude provedeno na rovnici (1.34a), kdy bude vyjádřeno napětí  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \varepsilon_x E + \mu(\sigma_y + \sigma_z). \quad (1.37)$$

Po dosazení rovnice (1.36) a vyjádření  $\sigma_x$  je získán vztah:

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x E}{1 + \mu} + \frac{E\mu e}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}. \quad (1.38)$$

Po zavedení vztahu:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}, \quad (1.39)$$

kde  $\lambda$  je Lamého konstanta a při využití vztahu (1.29) pro modul pružnosti ve smyku a rovnice (1.39) dostaneme rovnici (1.37) ve tvaru:

$$\sigma_x = 2G \cdot \varepsilon_x + \lambda e. \quad (1.40)$$

Analogicky pak pro zbylé souřadnicové osy:

$$\sigma_y = 2G \cdot \varepsilon_y + \lambda e, \quad \sigma_z = 2G \cdot \varepsilon_z + \lambda e. \quad (1.41)$$

Pro úhlové přetvoření lze odvodit vztahy:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (1.42)$$

Pro inverzní tvar jsou vyjádřena smyková napětí:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{zx}. \quad (1.43)$$

## 2. Rešerše a vymezení problematiky desek

V této kapitole bude pojednáno o dvou teoriích (teorie PPII a Kirchhoffova teorie), které budou využity při odvozování rovnic pro obecné a rotačně symetrické desky. Vztahy pro řešení desky budou uvedeny také v této kapitole. Dále bude vymezena použitelnost Kirchhoffovy teorie desek, která bude východiskem pro D-N analýzu kruhových a mezikruhových desek.

### 2.1 Předpoklady tenkostěnnosti desky

Deska je trojrozměrné tenkostěnné těleso, které splňuje následující předpoklady (obr. 2.1) [3]:

a) Geometrické předpoklady

- Deska je určena tloušťkou  $h$  a střednicovou plochou  $\Gamma$ , která tloušťku souměrně rozděluje.
- Střednicová plocha je spojitá, hladká a má konečné rozměry.

b) Vazbové předpoklady

- Vazby omezují pouze posuvy a úhly natočení střednicové plochy.

c) Zatěžovací předpoklady

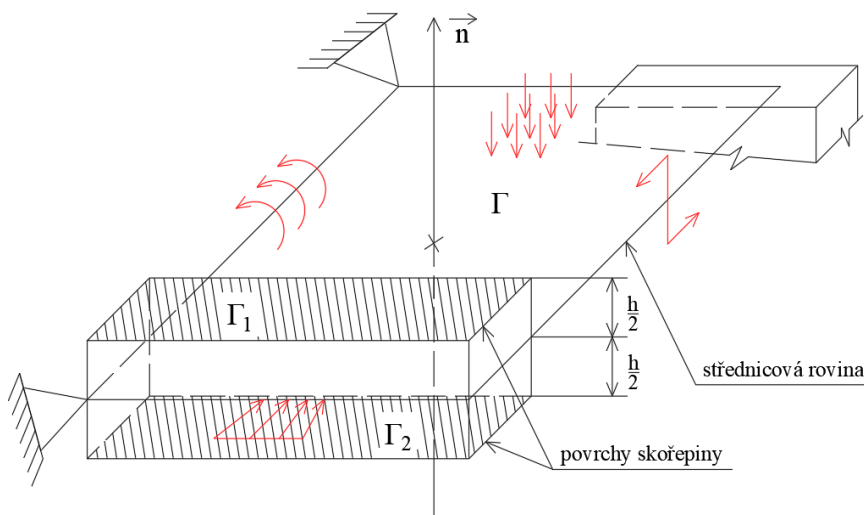
- Vnější síly působí pouze na body střednicové plochy.

d) Deformační předpoklady

- Střednicová plocha zůstává při deformaci spojitá a hladká.

e) Napjatostní předpoklady

- Napjatost v desce je určena normálovými a smykovými napětími ve dvou vzájemně kolmých normálových řezech.



**Obr. 2.1:** Tenkostěnné těleso [3].

### 2.2 Kirchhoffova teorie desek

Je zaveden pravoúhlý souřadnicový systém tak, že osy  $x$  a  $y$  leží v rovině střednicové plochy a osa  $z$  míří dolů. Tato práce se bude řídit předpoklady Kirchhoffovy teorie desek, které umožňují řešit desku jako rovinnou úlohu. Tyto předpoklady zní [4]:

- a) Materiál je lineárně pružný, isotropní a homogenní (Hookovský materiál).
- b) V počátečním tvaru je deska rovná.

- c) Průhyb střednicové plochy je malý ve srovnání s tloušťkou desky.
- d) Normály střednicové plochy zůstávají přímé a kolmé k této rovině a jejich délka se v průběhu deformace nemění.
- e) Normálové napětí  $\sigma_z$  je malé v porovnání s napětími  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  a proto je považováno za nulové.
- f) Na střednicové ploše jsou normálová napětí nulová a dochází zde pouze k posuvům ve směru osy  $z$ , tzn., nedochází k protahování desky.

## 2.3 Geometrie tělesa

Jak již bylo zmíněno v kapitole 2.1, geometrie desky je určena tloušťkou  $h$ . Tento rozměr od sebe rozděluje roviny  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$ , které ohraničují toto těleso.

Desky lze rozdělit do tří skupin podle poměru  $a/h$  [4]:

- tlustostěnné desky, kde  $a/h \leq 8 \dots 10$
- tenkostěnné desky, kde  $8 \dots 10 \leq a/h \leq 80 \dots 100$ ,
- membrány, kde  $a/h \geq 80 \dots 100$

kde  $a$  je typický rozměr desky (délka, šířka, průměr,...).

Tenkostěnné desky jsou rozděleny na další na dva typy, a to podle poměru  $w/h$ :

- tuhé desky, kde  $w/h \leq 0,2$
- flexibilní desky, kde  $w/h \geq 0,3$ ,

kde  $w$  je maximální průhyb desky.

Díky malému průhybu střednicové plochy nabízí tuhé desky možnost řešit rovnice statické rovnováhy v nedeformovaném tvaru. U flexibilních desek dochází při deformaci k protahování střednicové plochy, tudíž už nelze zanedbat normálové síly, působící ve směru osy  $x$  a  $y$ . Tyto desky jsou tedy kombinací tuhé desky a stěny. Pokud by byla hodnota průhybu značně větší než tloušťka desky, ohybové napětí by bylo zanedbatelné a napětí by bylo jednotně rozloženo po celé tloušťce tělesa, tzn., že  $z$  desky by se stala stěna.

Tato práce se bude řídit předpoklady podle 2.1 a 2.2, takže se bude zabývat především tenkostěnnými tuhými deskami. Při porovnávání analytických a numerických řešení budou testovány i modely, které svými rozměry spadají do zbylých typů desek.

## 2.4 Deformace tělesa

Složky posuvu bodu na tělese  $u, v, w$  budou působit na osách  $x, y, z$  v tomto pořadí. Z předpokladu 2.2 d) vyplývá [4]:

$$\varepsilon_z = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{xz} = 0. \quad (2.1)$$

Posuvy  $u, v$  jsou nulové na bodech střednicové plochy, na bodech ve vzdálenosti  $z$  od této roviny jsou dány vztahy:

$$u = -z\vartheta_x, v = -z\vartheta_y. \quad (2.2)$$

Kde  $\vartheta_x$ , resp.  $\vartheta_y$ , je úhel natočení mezi tečnou k prohnuté střednici a osou  $x$  v souřadném systému  $Oxz$ , resp. osou  $y$  v  $Oyz$ . Natočení lze vyjádřit těmito rovnicemi:

$$\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Pokud budou do rovnic (1.8, 1.9) dosazeny vztahy (2.2, 2.3), vzniknou vztahy:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.5)$$

Deformaci desky tedy lze považovat za dvojsovou obecnou a lze ji zapsat pomocí tenzoru přetvoření:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Typickým nezávislým posuvem bude posuv  $w$ , který se nazývá průhyb.

## 2.5 Napjatost tělesa

Podle obecné teorie pružnosti a pevnosti [3] by při dvojsové obecné deformaci měla vznikat trojosá obecná napjatost. S přihlédnutím ke 2.2 e) bude považováno  $\sigma_z = 0$  a tudíž bude napjatost vyjádřena tenzorem napětí v tomto tvaru [4]:

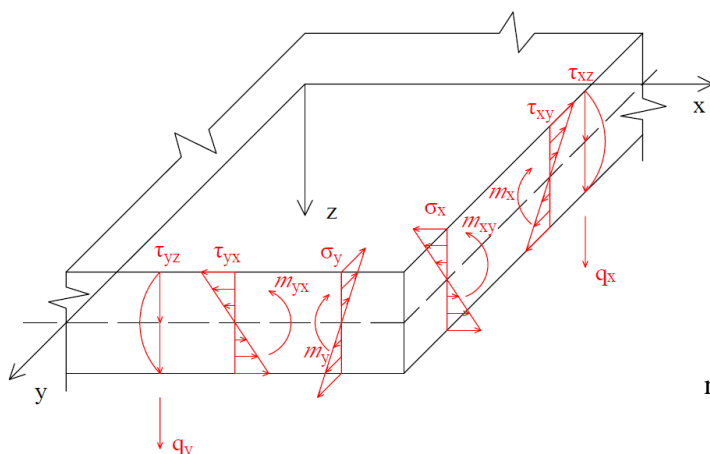
$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Z konstitutivních vztahů a vztahů pro deformaci desky vychází rovnice:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{yx} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.6 Rovnice desky

Jelikož se tato práce primárně zaměřuje na rotačně symetrické desky, nebude zde odvozován každý vztah pro vnitřní silové působení a napětí na obecné desce v pravoúhlém souřadnicovém systému (obr. 2.2). Budou sepsány pouze vztahy, které budou využity při popisu metod řešení nekruhových desek.



**Obr. 2.2:** Vnitřní silové působení a napětí na obecné desce [4].

Po integrování normálových a smykových napětí následujícím způsobem (rovnice statické ekvivalence) [4]:

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix} z dz, \quad (2.9)$$

vzniknou rovnice pro měrné ohybové momenty  $m_x, m_y$  a pro měrný krouticí moment  $m_{xy}$ :

$$\begin{aligned} m_x &= -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ m_y &= -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ m_{xy} &= -B(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

kde  $B$  je ohybová tuhost desky a je vyjádřena vztahem:

$$B = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (2.11)$$

Vyjádřením druhých derivací z rovnic (2.10) a následným dosazením do rovnic (2.8) budou získány závislosti napětí na momentech v tomto tvaru:

$$\sigma_x = \pm \frac{12M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \pm \frac{12M_y}{h^3} z, \quad (2.12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z. \quad (2.13)$$

Po integrování zbylých smykových napětí

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz, \quad (2.14)$$

vzniknou rovnice pro měrné posouvající síly  $q_x$  a  $q_y$ :

$$\begin{aligned} q_x &= -B \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right), \\ q_y &= -B \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

I přesto, že smyková napětí  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  v rámci Kirchhoffovy teorie jsou zanedbány, tak posouvající síly mají důležitou úlohu v rovnicích rovnováhy, ze kterých je odvozena diferenciální rovnice desky [4].

Pokud bude zatěžována elementární oblast desky  $dx \times dy$  plošným zatížením  $p(x, y)$ , bude průhybová rovnice desky odvozená od liniových výsledných vnitřních účinků (dále LVVÚ) na střednicové ploše vypadat následovně:

$$\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} = \frac{p}{B}. \quad (2.16)$$

Jedná se o lineárně parciální diferenciální rovnici 4. řádu s konstantními koeficienty.

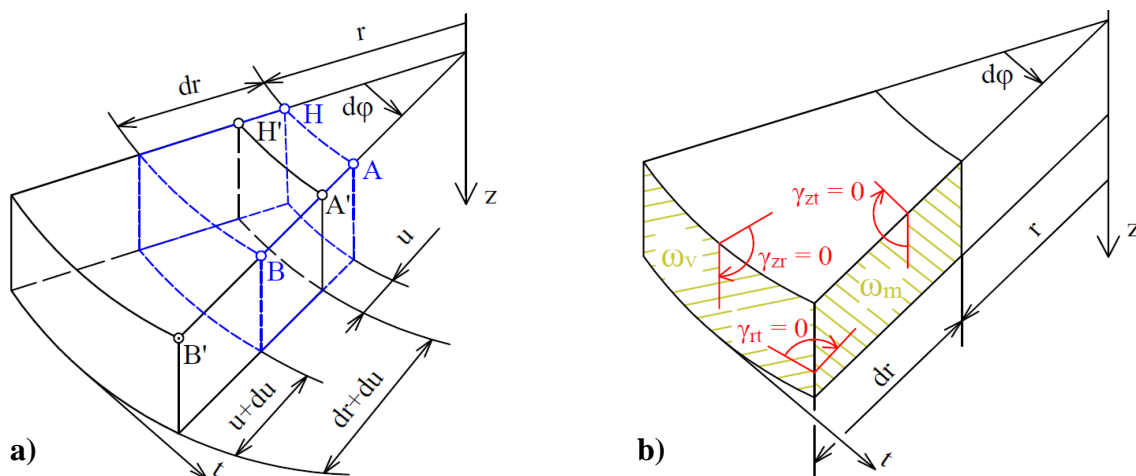


## 2.7 Kruhové a mezikruhové desky

Kruhové a mezikruhové desky jsou elementárním typem těles, u kterých lze díky rotační symetrii provádět analytické řešení v uzavřeném tvaru [3]. Na rozdíl od obecné desky budou definovány vlastnosti těchto desek ve válcovém souřadnicovém systému  $z, r, \varphi$ , kde indexy jednotlivých souřadnicových os budou označovány  $z, r, t$ . (obr. 2.3a).

Geometrické vztahy jsou odvozeny tímto způsobem:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(dr + du) - dr}{dr} = \frac{du}{dr}, \\ \varepsilon_r &= \frac{\widehat{A'H'} - \widehat{AH}}{\widehat{AH}} = \frac{(r + u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.17)$$



**Obr. 2.3:** Elementární prvek a jeho **a)** deformace, **b)** řezy a úhlová přetvoření [3].

Elementární prvek je dvojnásobný a je tvořen válcovým  $\omega_v$  a meridiánovým  $\omega_m$  řezem (obr. 2.3b). Kvůli rotační symetrii je nezbytné, aby body, které leží v meridiánové rovině, leželi v téže rovině i po deformaci. Při průhybu se mění válcové řezy na řezy kuželové.

Tenzor přetvoření v bodě tělesa vypadá následovně:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_t \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

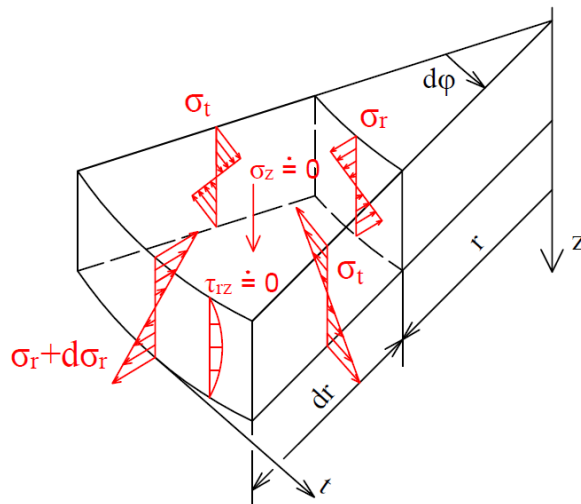
Jedná se tedy o trojosou deformaci. Při vyšetřování napjatosti nebude v konstitutivních vztazích  $\varepsilon_z$  uvažováno, jelikož změna tloušťky desky nemá vliv na tuto napjatost. V důsledku rotační symetrie jsou úhlová přetvoření  $\gamma_{zt}, \gamma_{rt}$  nulová. Z důvodu zanedbání borcení řezů vlivem posuvové síly je považováno  $\gamma_{zr}$  také za nulové. V bodech na střednicové ploše platí  $\varepsilon_z = 0$ . Tudíž je zde dvojosa deformace.

V hlavních řezech  $\omega_v, \omega_m$  působí radiální  $\sigma_r$  a obvodové  $\sigma_t$  napětí, která jsou po tloušťce desky rozložena lineárně (obr. 2.4). Smykové napětí  $\tau_{rt}$  je nulové, smyková napětí  $\tau_{rz}, \tau_{tz}$

jsou zanedbatelně malá vzhledem k normálovým napětím. Napjatost v bodě tělesa je dána tenzorem napětí:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_t \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

V desce vzniká dvojosá a na střednicové ploše nulová napjatost.



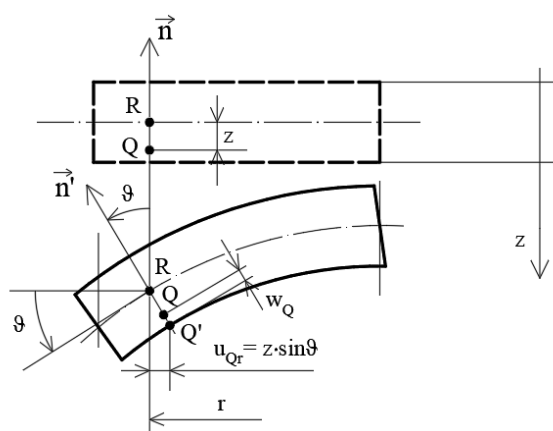
**Obr. 2.4:** Napětí na elementárním prvku [3].

Při deformaci střednicové plochy jsou radiální  $u_r$  a obvodové  $u_t$  posuvy bodů této roviny nulové a jediným nenulovým posuvem se tak stává průhyb  $w$  v ose  $z$  (obr. 2.5). Radiální posuvy bodů, které leží mimo tuto rovinu, jsou určeny podobným vztahem jako u obecné desky:

$$u_{Qr} = z \sin \vartheta = z\vartheta, \quad (2.20)$$

kde natočení  $\vartheta$  je dáno vztahem:

$$\vartheta = \frac{dw}{dr}. \quad (2.21)$$



**Obr. 2.5:** Posuvy na meridiánovém řezu desky [3].

Rotačně symetrické desky lze zatěžovat různými způsoby silového zatížení (obr 2.6) [3]:

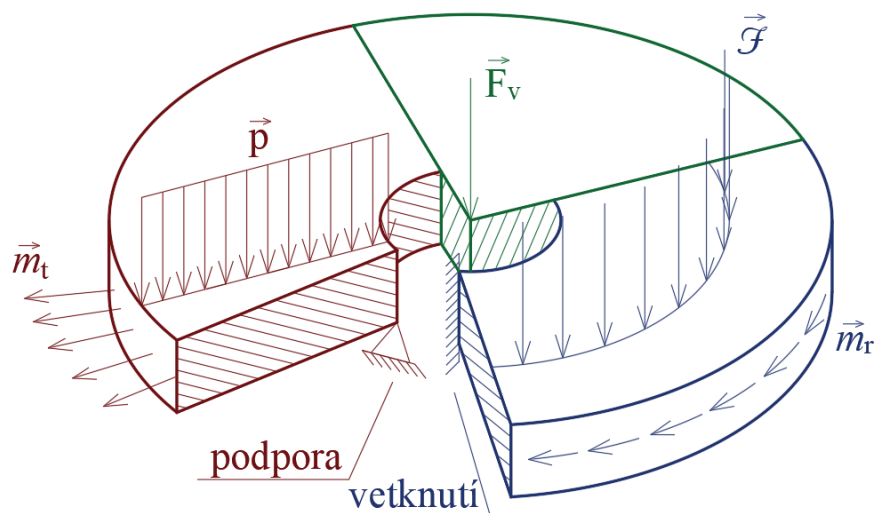
- spojitý měrný tlak  $p$
- liniové síly  $\mathcal{F}$  působící na soustředných kružnicích
- osamělá síla  $F_v$  působící v ose desky
- liniové radiální momenty  $m_r$  na obvodech desky nebo na soustředných kružnicích
- výjimečně obvodové momenty  $m_t$

Deformačním zatížením mohou být zadané:

- úhly natočení  $\vartheta$
- průhyby  $w$

Vazby s rotačně souměrným charakterem mohou být (obr. 2.6):

- podepření
- vetknutí



**Obr. 2.6:** Zatížení a vazby na kruhové a mezikruhové desce.

### 3. Metody pro řešení deformačně-napět'ové odezvy desek

#### 3.1 Metody pro řešení deformačně-napět'ové odezvy kruhových a mezikruhových desek

U rotačně symetrických desek je řešení v uzavřeném tvaru možné provádět analyticky. To má své výhody, například lze sledovat závislosti veličin v jednotlivých vztazích. Díky tomu lze posoudit citlivost výstupních údajů, jako je průhyb a napětí, na změně vstupních parametrů. To se dá velmi dobře využít při optimalizaci konstrukce. Kromě přímých úloh lze řešit i úlohy inverzní. Poslední důležitou výhodou je nízká operační složitost. Následující kapitola bude vycházet ze skript pružnosti a pevnosti II [3].

##### 3.1.1 Analytické řešení přímé úlohy pružnosti

Na rozdíl od rovnic obecné desky, zde budou odvozeny všechny vztahy, které povedou na řešení rovnice natočení, resp. průhybové rovnice.

Na střednicovou plochu elementárního prvku působí tyto LVVÚ (obr. 3.2):

- ohybové momenty:

$$M_r = m_r r, \quad M'_r = \left( m_r + \frac{\partial m_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi, \quad M_t = M'_t = m_t dr. \quad (3.1)$$

- posouvající síly:

$$T = T r d\varphi, \quad T' = \left( T + \frac{\partial T}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi. \quad (3.2)$$

- silová výslednice spojitého měrného tlaku  $p_z(r)$  působícího na střední rovinu  $\Gamma$  prvku  $\Omega_D$ :

$$F_z = p_z(r) \cdot r \cdot d\varphi dr. \quad (3.3)$$

**Rovnice rovnováhy** pro uvolněný prvek jsou zapsány v tomto tvaru:

$$\sum F_z = 0: \quad T' - T + F_z = 0, \quad (3.4)$$

$$\sum M_t = 0: \quad M'_r - M_r - M_t d\varphi - T dr = 0. \quad (3.5)$$

Po dosazení rovnic (3.1–3.3) do rovnic rovnováhy (3.4, 3.5) a po zanedbání veličin druhého řádu vzniknou tyto vztahy:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} dr \right) r d\varphi + T dr d\varphi + p_z(r) r d\varphi dr = 0, \quad (3.6)$$

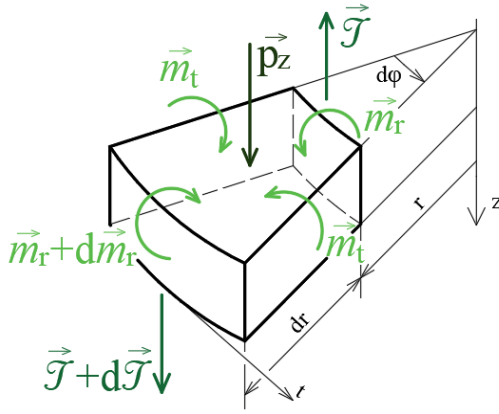
$$\left( \frac{\partial m_r}{\partial r} dr \right) r d\varphi + (m_r d\varphi) dr - (m_t d\varphi) dr - (T r d\varphi) dr = 0. \quad (3.7)$$

Po zkrácení rovnice (3.6), resp. (3.7) činitelem  $r d\varphi dr$ , resp.  $dr d\varphi$  lze získat:

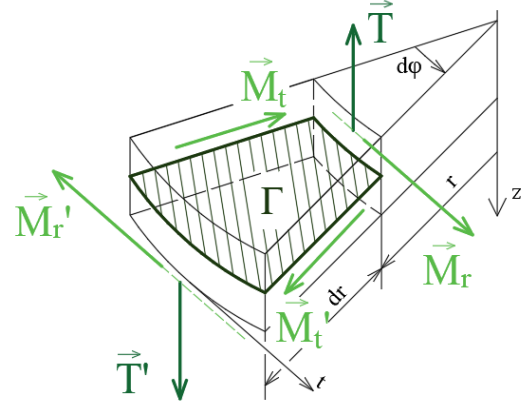
$$\frac{dT}{dr} + \frac{T}{r} + p_z(r) = 0, \quad (3.8)$$

$$m_r - m_t + \frac{dm_r}{dr} r = rT, \quad (3.9)$$

kde parciální derivace byly nahrazeny obyčejnými z důvodu závislosti pouze na jedné proměnné  $r$ .



**Obr. 3.1:** Uvolněný elementární prvek [3].



**Obr. 3.2:** LVVÚ na střednicové rovině elementárního prvku [3].

**Geometrické rovnice** pro obecný bod desky lze získat dosazením rovnic (2.20, 2.21) do rovnic (1.8,1.9):

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= -z \frac{d\vartheta}{dr}, \\ \varepsilon_t &= -z \frac{\vartheta}{r}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

**Konstitutivní vztahy** pro dvojosou napjatost desky budou zapsány následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_t), \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_t + \mu \varepsilon_r).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Pokud do konstitutivních vztahů (3.11) dosadíme geometrické vztahy (3.10), vzniknou rovnice pro radiální a obvodové napětí:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ -z \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \left( -z \frac{\vartheta}{r} \right) \right], \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ -z \frac{\vartheta}{r} + \mu \left( -z \frac{d\vartheta}{dr} \right) \right].\end{aligned}\quad (3.12)$$

Dalším krokem pro odvození diferenciální rovnice desky bude integrace podle rovnic statické ekvivalence:

$$\begin{Bmatrix} m_r \\ m_t \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \end{Bmatrix} z dz.\quad (3.13)$$

Po integraci a dosazení vztahů (3.12) do (3.13) získáme:

$$\begin{aligned}m_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_r dz = -\frac{E}{1-\mu^2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \left( z \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \cdot z \frac{\vartheta}{r} \right) dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right), \\ m_t &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_t dz = -\frac{E}{1-\mu^2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \left( z \frac{\vartheta}{r} + \mu \cdot z \frac{d\vartheta}{dr} \right) dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right).\end{aligned}\quad (3.14)$$

V předchozích kapitolách byl používán vztah (2.11) pro ohybovou tuhost desky  $B$ , i zde ho využijeme pro rovnice (3.14). Finální tvar pro radiální a obvodové momenty vypadá následovně:

$$\begin{aligned} m_r &= -B \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right), \\ m_t &= -B \left( \frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pro získání diferenciální rovnice desky stačí dosadit vztahy (3.15) do rovnice rovnováhy (3.9).

$$\begin{aligned} -B \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) + B \left( \frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) - Br \frac{d}{dr} \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) &= r\mathcal{T} \quad /: (-B), \\ \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \left( \frac{\vartheta}{r} \right) - \left( \frac{\vartheta}{r} \right) - \mu \frac{d\vartheta}{dr} + r \cdot \left( \frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{\frac{d\vartheta}{dr} r\mu - \mu\vartheta}{r^2} \right) &= -\frac{r\mathcal{T}}{B} \quad /: r, \\ \frac{d\vartheta}{dr} \frac{1}{r} + \mu \left( \frac{\vartheta}{r^2} \right) - \left( \frac{\vartheta}{r^2} \right) - \mu \frac{d\vartheta}{dr} \frac{1}{r} + \frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \frac{1}{r} - \mu \left( \frac{\vartheta}{r^2} \right) &= -\frac{\mathcal{T}}{B}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Po odečtení stejných členů vznikne **rovnice desky v úhlech natočení**:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{\mathcal{T}(r)}{B}. \quad (3.17)$$

K vyjádření **průhybové rovnice desky** stačí dosadit do této rovnice vztah (2.21):

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = -\frac{\mathcal{T}(r)}{B}. \quad (3.18)$$

### 3.2 Metody pro řešení deformačně-napět'ové odezvy nekruhových desek

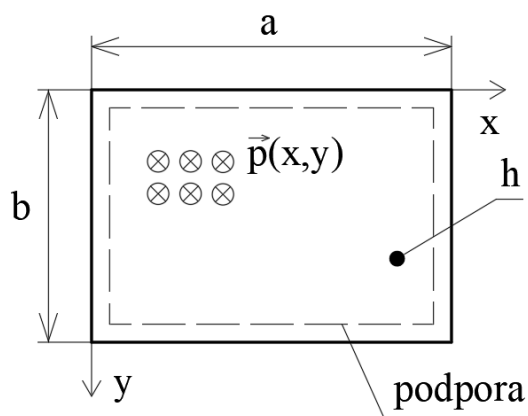
U nekruhových desek není všeobecně možno provádět analytické řešení v uzavřeném tvaru. Takové řešení je vytvořeno konečným počtem elementárních operací s veličinami a elementárními funkcemi, jako jsou například trigonometrické funkce [3]. V této kapitole budou ukázány různé numerické metody využívající nekonečné řady.

#### 3.2.1 Navierova metoda

Francouzský fyzik a technik Claude-Louis Navier prezentoval v roce 1820 metodu pro řešení ohybu, která se používá pro desky podepřené po celém svém obvodu [4,5]. Využívá k tomu dvojistou nekonečnou Fourierovu řadu.

Postup výpočtu bude představen na obdélníkové desce o rozměrech  $a \times b$  a tloušťce  $h$ , na kterou působí rovnoměrné zatížení  $p(x, y)$ . Okrajové podmínky vypadají následovně:

$$\begin{aligned} w &= 0|_{x=0,a}; \quad M_x = \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = 0|_{x=0,a}, \\ w &= 0|_{y=0,b}; \quad M_y = \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = 0|_{y=0,b}. \end{aligned} \quad (3.19)$$



**Obr. 3.3:** Obdélníková deska podepřená po celém obvodu [4].

Řešení diferenciální rovnice (2.16) je možno získat z výrazů pro průhyb  $w(x, y)$  a pro zatížení  $p(x, y)$  ve tvaru dvojitých nekonečných řad:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.20)$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.21)$$

kde koeficienty  $w_{mn}$  a  $p_{mn}$  budou stanoveny. Lze snadno ověřit, že rovnice (3.2) splňuje okrajové podmínky (3.19).

K určení  $p_{mn}$  vynásobíme rovnici (3.21) dvěma funkcemi sinus a dvakrát integrujeme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy, \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Přímou integrací lze ukázat, že:

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{l\pi x}{a} dx &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } m \neq l \\ \frac{a}{2} & \text{pokud } m = l, \end{cases} \\ \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } n \neq k \\ \frac{b}{2} & \text{pokud } n = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Díky tomu lze psát koeficient  $p_{mn}$  ve tvaru:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (3.24)$$

Jelikož rovnice (3.20) splňuje okrajové podmínky (3.19), musí také splňovat rovnici desky (2.16). Pokud tedy bude rovnice desky dosazena do rovnice (3.20), vznikne:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ w_{mn} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{p_{mn}}{B} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (3.25)$$

Rovnice (3.25) musí platit pro všechny hodnoty  $x$  a  $y$ , z toho je tedy vyvozeno, že

$$w_{mn} = \frac{1}{\pi^4 B} \cdot \frac{p_{mn}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (3.26)$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice (3.20) lze získat finální rovnici průhybové plochy:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 B} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.27)$$

kde  $p_{mn}$  je dáno vztahem (3.24). Lze dokázat, že pro každé  $x$  a  $y$  a pro každé  $m$  a  $n$  platí:

$$\left| \sin \frac{m\pi x}{a} \right| \leq 1, \quad \left| \sin \frac{n\pi y}{b} \right| \leq 1 \quad (3.28)$$

Z toho vyplývá, že rovnice (3.27) je vždy konvergentní.

Dosazením rovnice (3.27) do rovnic (2.10) a (2.15) lze vypočítat momenty a posouvající síly na desce.

Navierova metoda je velmi dobře použitelná pro rovnici průhybu, protože řada konverguje rychle a uspokojivé řešení lze získat v pár krocích. Jelikož LVVÚ je možno dostat druhou nebo třetí derivací rovnice (3.27), tak rychlost konvergence klesá (obzvlášť v okolí okraje desky) a v důsledku toho se snižuje i přesnost při výpočtu [4].

### 3.2.2 Lévyho metoda

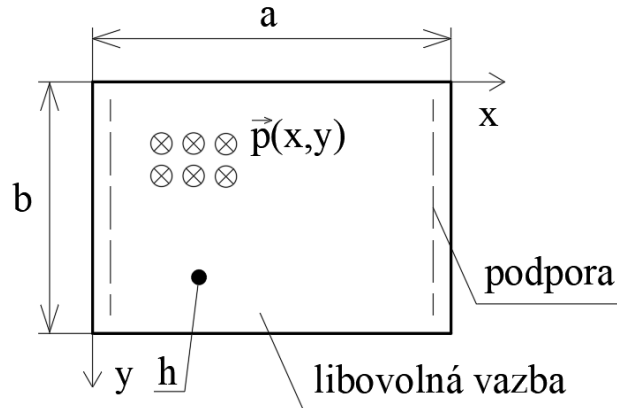
V roce 1900 vytvořil Francouzský inženýr Maurice Lévy metodu pro řešení ohybu desky, která využívá pouze jednu Fourierovu řadu [4,6]. Lze ji použít na obdélníkové desky, které jsou podepřené na dvou protilehlých stranách, a na zbylých dvou stranách je libovolná vazba. Díky těmto vlastnostem je metoda mnohem praktičtější a snazší na výpočet než metoda předchozí.

Podle této metody lze rovnici (2.16) vyjádřit pomocí komplementární  $w_h$  a partikulární  $w_p$  části, kde každá z nich obsahuje jednu Fourierovu řadu a neznámé funkce lze vyjádřit z okrajových podmínek. Řešení lze zapsat takto:

$$w = w_h + w_p. \quad (3.29)$$



Řešení bude ukázáno na desce podobného typu jako v kapitole 3.1.1. Strany  $x = 0$  a  $x = a$  zůstanou stejné a na zbylé dvě dáme libovolnou vazbu (obr. 3.4). Okrajové podmínky pro



**Obr. 3.4:** Obdélníková deska podepřená na dvou protilehlých stranách.

podepřené strany píšeme ve tvaru rovnice (3.19).

Komplementární řešení vypadá následovně:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (3.30)$$

Dosazením této rovnice do vztahu (2.16) vznikne:

$$\left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y) - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f_m(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 f_m(y)}{\partial y^4} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = 0. \quad (3.31)$$

Rovnice je splněna, pokud se výraz v závorce rovná nule. Řešení diferenciální rovnice v závorce lze zapsat ve tvaru:

$$f_m(y) = e^{\lambda y}. \quad (3.32)$$

Substitucí této rovnice do diferenciální rovnice lze získat charakteristickou rovnici:

$$\lambda^4 - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \lambda^2 + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} = 0. \quad (3.33)$$

Kořeny rovnice vypadají následovně:

$$\lambda_{1,2} = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{m\pi}{a}. \quad (3.34)$$

Podle získaných hodnot charakteristických exponentů lze řešení homogenní rovnice zapsat ve tvaru exponenciální nebo hyperbolické funkce. Pro další výpočet bude výhodnější zvolit hyperbolickou funkci, kterou lze zapsat tímto způsobem:

$$f_m(y) = A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \left( C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (3.35)$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice (3.20) lze získat:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \left( C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (3.36)$$

Kde konstanty  $A_m, B_m, C_m$  a  $D_m$  budou vyjádřeny z okrajových podmínek pro  $y = 0$  a  $y = b$ .

Partikulární řešení lze obdobně vyjádřit Fourierovou řadou:

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (3.37)$$

Rovnoměrně rozložené silové zatížení lze vyjádřit obdobně:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (3.38)$$

kde

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (3.39)$$

Podobně jako u komplementárního řešení, lze i zde dosadit rovnice (3.37, 3.38) do rovnice (2.16) a získat tím tento vztah:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 g_m(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f g_m(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 g_m(y)}{\partial y^4} = \frac{p_m(y)}{B}. \quad (3.40)$$

Vyřešením rovnice (3.40) bude získáno  $g_m(y)$  a poté nakonec bude nalezeno partikulární řešení  $w_p(x, y)$ . Komplementární a partikulární řešení LVVÚ lze získat dosazením příslušných vztahů pro  $w_h$  a  $w_p(x, y)$  do rovnic (2.10, 2.15).

### 3.3 Metoda konečných prvků

Předchozí metody popsané v této kapitole, mají omezené využití na několik konkrétních typů úloh. Metoda konečných prvků (dále MKP) nabízí řešení pro všechny matematicky popsatelné úlohy bez ohledu na jejich složitost. Jedná se o numerickou metodu, která převádí problém hledání spojitých funkcí na problém hledání konečného počtu parametrů, pomocí nichž se funkce aproximují [7]. Tomuto principu se říká diskretizace spojitého problému. V této kapitole bude pojednáno o deformační variantě MKP, kde neznámými parametry jsou funkce posuvů.

Východiskem MKP je tzv. Lagrangeův variační princip, který definujeme následovně:

*„Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udílejí celkové potenciální energii  $\Pi$  stacionární hodnotu.“ [7]*

Stacionární hodnota je zároveň minimem potenciální energie  $\Pi$ , kterou lze zapsat takto:

$$\Pi = W - P, \quad (3.41)$$

kde  $W$  je energie napjatosti tělesa  $\Omega$  a  $P$  je potenciál vnějšího zatížení:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (3.42)$$

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{o} dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS. \quad (3.43)$$

V těchto rovnicích vystupují sloupcové matice posuvů  $\mathbf{u}^T$ , napětí  $\boldsymbol{\sigma}^T$ , přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ , objemového  $\mathbf{o}^T$  a plošného  $\mathbf{p}^T$  zatížení.

Obecně je potenciální energie  $\Pi$  závislá na spojitých funkcích posuvů  $\mathbf{u}^T(u, v, w)$  v souřadnicích pravoúhlého kartézského systému. Neznámých hodnot těchto funkcí je však nekonečně mnoho, jelikož vyšetřovaná oblast tělesa má nekonečně mnoho bodů. Proto je nutné rozdělit oblast na konečný počet prvků, které obsahují uzlové body. Tím se vytvoří tzv. síť MKP, která svojí hustotou ovlivňuje kvalitu a operační složitost řešení. V těchto uzlech hledáme řešení neznámých posuvů  $(u_i, v_j, w_k)$ , které lze získat z následujících rovnic aproximace posuvů:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \cdot u_i, \\ v(x, y, z) &= \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) \cdot v_j, \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) \cdot w_k, \end{aligned} \quad (3.44)$$

kde  $N_{i,j,k}$  jsou báze funkce, což jsou známé funkce v jednotlivých uzlech. Dosazením rovnic (3.44) do vztahu (3.41) lze získat vztahy pro potenciální energie, závislé na neznámých posuvech. Podmínka stacionární hodnoty (minima)  $\Pi$  umožní tyto neznámé veličiny vyřešit:

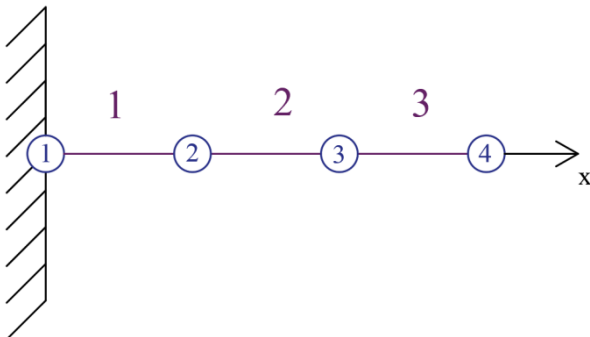
$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial w_n} \right\} \rightarrow u_1, u_2, \dots, w_n. \quad (3.45)$$

Vyřešené parametry posuvů lze dosadit zpátky do rovnic (3.44) a tím dostat aproximace hledaných funkcí posuvů.

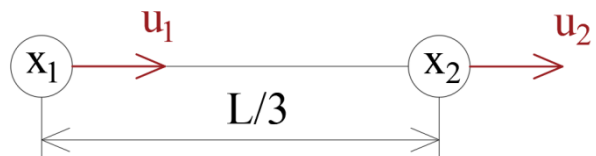
Princip MKP bude ukázán na případě vetknutého prutu (obr 3.5), který je zatěžován pouze tíhovou silou ve směru osy  $x$ . Je vytvořena síť MKP o 3 prvcích a 4 uzlech. Prvek 1 je znázorněn na obr 3.6. Aproximace posuvu po délce tohoto prvku je dána rovnicí:

$$u(x) = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}, \quad (3.46)$$

kde  $\mathbf{N} = [N_1, N_2]$  a  $\boldsymbol{\delta} = [u_1, u_2]^T$ .



**Obr 3.5:** Síť MKP vetknutého prutu [7].



**Obr. 3.6:** Osově namáhaný prutový prvek [7].

Potenciální energie je zapsána ve tvaru rovnice (3.41) s dolním indexem příslušného prvku. Energie napjatosti je:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sigma \varepsilon S dx. \quad (3.47)$$

Napětí i přetvoření musí být vyjádřeno pomocí posuvů:

$$\varepsilon = \frac{d}{dx} (N\delta) = B\delta, \quad (3.48)$$

$$\sigma = EB\delta = \delta^T B^T E. \quad (3.49)$$

Dosazením rovnic (3.48, 3.49) do vztahu (3.47) vznikne:

$$W_1 = \frac{1}{2} \delta^T \left( ES \int_{x_1}^{x_2} B^T B dx \right) \delta = \frac{1}{2} \delta^T k \delta, \quad (3.50)$$

kde  $k$  je prvková matice tuhosti.

Potenciál vnějšího zatížení je:

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} u(x) \rho g S dx. \quad (3.51)$$

Dosazením rovnice (3.46) a po menších úpravách lze potenciál vyjádřit následovně:

$$P_1 = \delta^T f, \quad (3.52)$$

kde  $f$  je prvková matice vnějšího zatížení. Prvky této matice představují celkové objemové a plošné zatížení působící na prvek tak, že jsou tyto síly rozděleny na polovinu a soustředěny do krajních uzlů, což zaručuje diskretizaci spojitého zatížení.

Analogicky lze matice  $k, f$  odvodit i pro zbylé prvky. Nyní bude vyjádřen celkový potenciál  $\Pi$  vyšetřovaného tělesa. Všechny neznámé posuvy budou přepsány do globální matice deformačních parametrů  $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ , matice tuhosti a vnějších zatížení budou rozšířeny o příslušné řádky a sloupce a budou označovány velkými písmeny  $K_i, F_i$ .

Celková energie napjatosti a celkový potenciál vnějšího zatížení jsou dány součtem prvkových příspěvků:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \frac{1}{2} U^T (K_1 + K_2 + K_3) U = \frac{1}{2} U^T K U, \quad (3.53)$$

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = U^T (F_1 + F_2 + F_3) = U^T F, \quad (3.54)$$

kde  $K$  je celková matice tuhosti a  $F$  je celková matice zatížení.

Dosazením vztahů (3.53, 3.54) do rovnice pro celkovou potenciální energii (3.41) vznikne:

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F. \quad (3.55)$$

Podmínka stacionární hodnoty (minima)  $\Pi$  (3.45), kterou lze upravit pro globální matici deformačních parametrů:

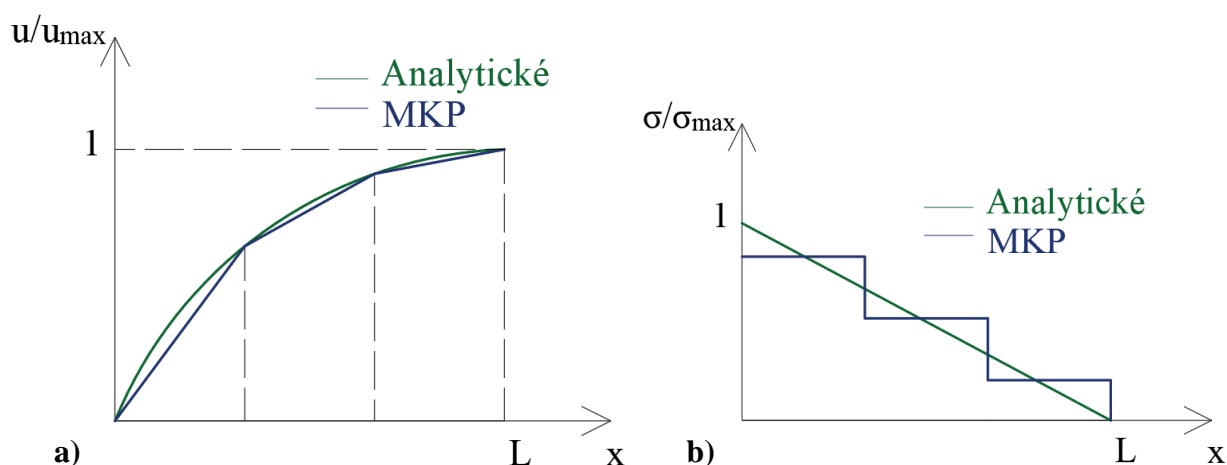
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (3.56)$$

nám umožní po parciálním derivování podle  $u_1, u_2, u_3, u_4$  dostat soustavu 4 lineárních algebraických rovnic, které lze zapsat v maticovém tvaru:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (3.57)$$

Tento předpis se nazývá základní rovnice MKP. Matice  $\mathbf{K}$  je singulární, tím pádem soustava rovnic nemá jednoznačné řešení. Je nutné tedy předepsat okrajové podmínky. V našem případě je to podmínka  $u_1 = 0$  v místě vetknutí. To se projeví na vypuštění tohoto posuvu z matice  $\mathbf{U}$ , na odstranění 1. řádku a sloupce z matice  $\mathbf{K}$  a 1. řádku z matice  $\mathbf{F}$ , díky čemuž bude mít soustava rovnic jednoznačné řešení.

Po získání všech neznámých deformačních parametrů z rovnice (3.57) se výpočet vrátí na prvkovou úroveň a budou vyřešeny v jakémkoliv bodě tělesa rovnice (3.46, 3.48, 3.49). Na grafech (obr. 3.7a,b) je porovnání numerického řešení s řešením analytickým. Díky trivialitě příkladu se v uzlových bodech posuvy shodují. Numerické řešení nám dalo lineární aproximaci posuvů, zatímco analytické řešení má kvadratický průběh. Napětí má u numerického řešení konstantní průběh, což koresponduje s odvozenou rovnicí napětí (3.49), kde matice  $\mathbf{B}$  vznikla derivací matice bazových funkcí.



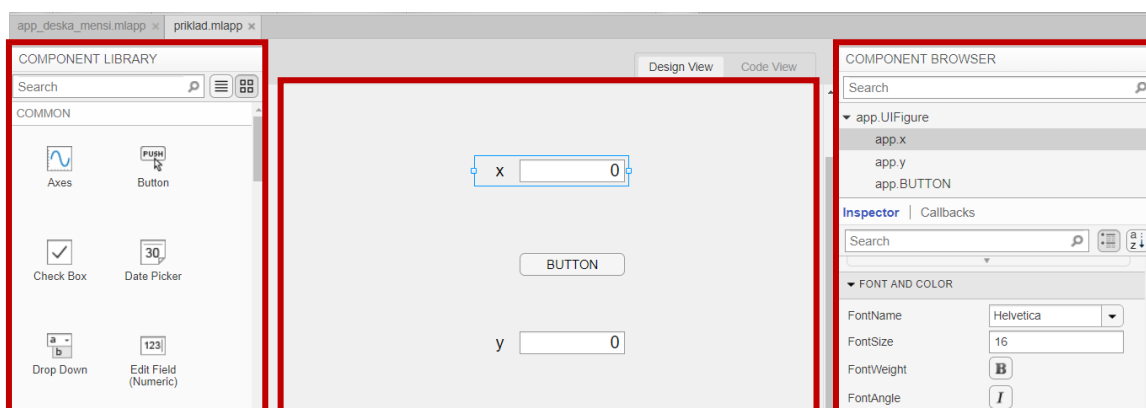
**Obr. 3.7:** Srovnání analytického a numerického řešení pro **a)** posuv, **b)** posuv [7].

## 4. Výpočetní nástroj pro deformačně-napět'ovou analýzu kruhových a mezikruhových desek

Výpočetní nástroj pro řešení D-N odezvy byl vytvořen v programu MATLAB R2019a APP DESIGNER. V prostředí tohoto softwaru je možno programovat aplikace s grafickým uživatelským rozhraním (dále GUI – z anglického „*graphical user interface*“). K tvorbě takové aplikace jsou v programu k dispozici dva režimy zobrazení.

První režim je „*Design View*“ (obr. 4.1), kde je vytvářeno GUI a to přetahováním jednotlivých grafických prvků z knihovny komponentů na pracovní plochu. SW APP DESIGNER nabízí výběr z velkého množství komponentů, které se třídí do několika skupin. Základem vytvořené aplikace jsou kombinace různých typů tlačítek, okna pro vkládání číselných hodnot, obrázky, textová okna, grafy a tabulky. Tento režim zobrazení také obsahuje prohlížeč vložených komponentů, ve kterém můžeme měnit jejich nastavení (barva písma a pozadí, fonty, pozice,...).

Druhý režim se nazývá „*Code View*“ (obr. 4.2). Zde je psán samotný program, kde jsou jednotlivým komponentům přiřazeny určité řádky kódu (kódy jsou pak seřazené v prohlížeči kódů). Při tvorbě aplikace byl použit programovací jazyk Matlab. Na obr. 4.3 lze vidět spuštěnou aplikaci pro konkrétní případ, kde byla komponentě „*BUTTON*“ předepsána rovnice  $y = x + 5$ , která se při interakci s tlačítkem vyřeší.

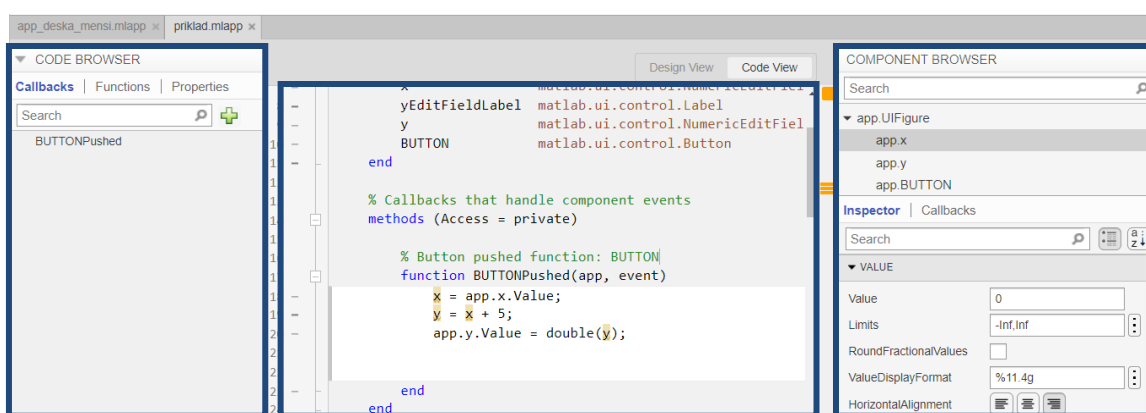


Knihovna komponentů

1. režim – Design View

Prohlížeč komponentů

Obr. 4.1: APP DESIGNER – Design View.

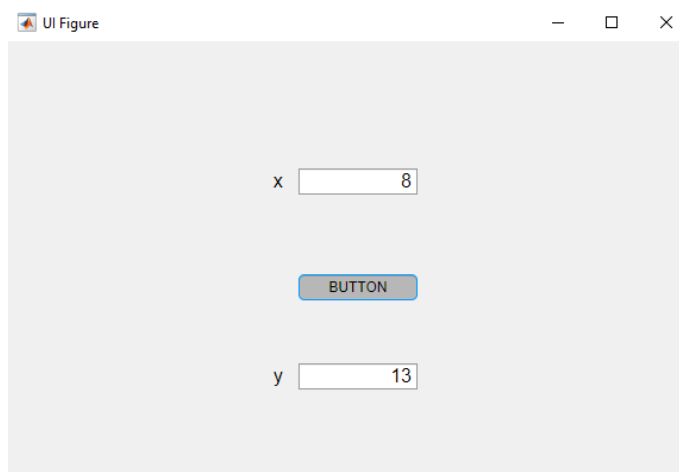


Prohlížeč kódů

2. režim – Code View

Prohlížeč komponentů

Obr. 4.2: APP DESIGNER – Code View.



**Obr. 4.3:** Aplikace po spuštění.

#### 4.1 Schéma programu výpočetního nástroje

Schéma programu pro výpočet D-N analýzy mechanicky zatížené rotačně symetrické desky vypadá následovně:

##### 1. Zadání vstupních parametrů:

a) Volba typu kruhové nebo mezikruhové desky podle druhu vazeb. Aplikace nabízí výběr z 8 typů desek (obr. 4.4). Rovnice rovnováhy u těchto desek obsahuje vždy pouze jednu neznámou. Řešení lze tedy realizovat z úplně uvolněného prvku a není potřeba částečně uvolňovat a předepisovat deformační podmínky.

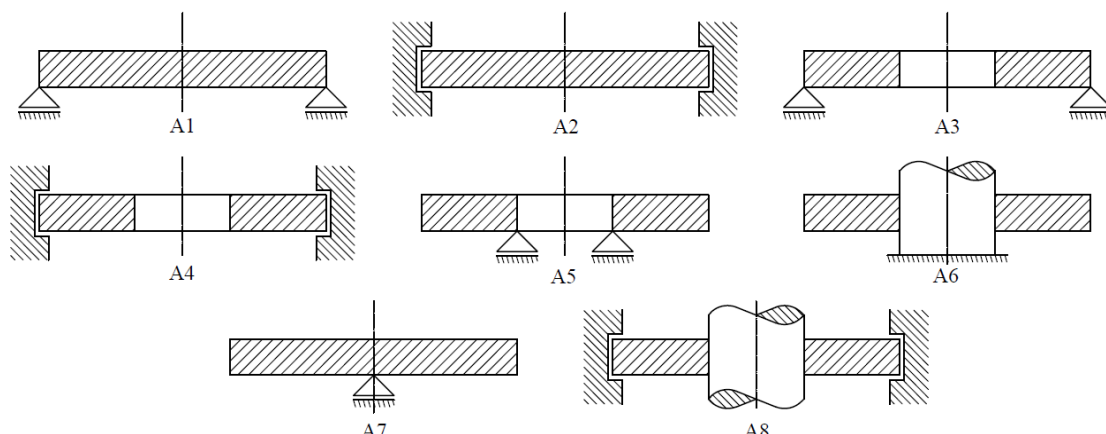
b) Typ mezního stavu:

- MSP podle HMH
- MSP podle  $\max \mathcal{T}$
- MS křehkého porušení podle MOS

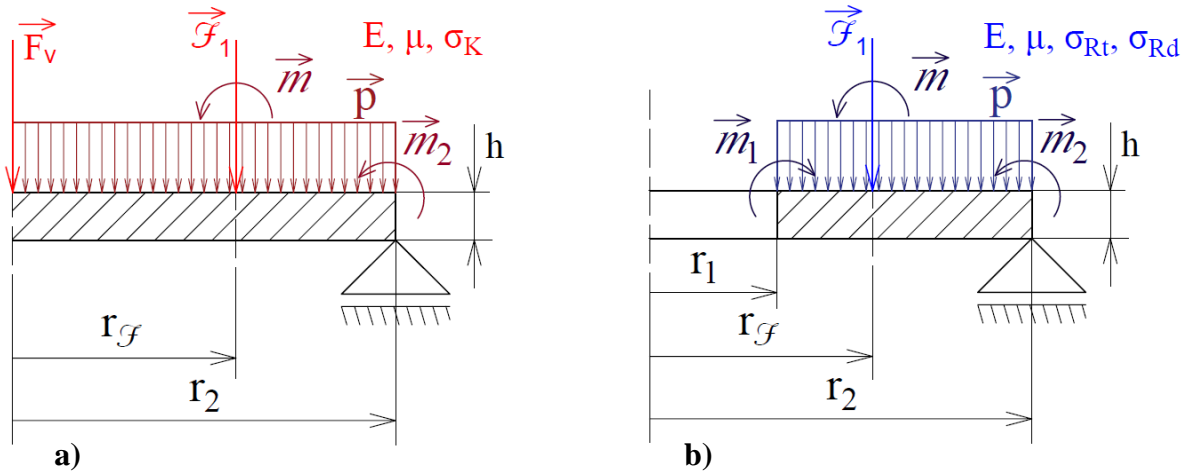
c) Typ úlohy:

- přímá
- inverzní

d) Materiálové, geometrické a zatěžovací charakteristiky (obr. 4.5a,b). Liniová síla a radiální momenty se v aplikaci zadávají jako celkové zatížení působící na obvod. Program si následně automaticky převede tyto veličiny na liniové (podělí je výrazem  $2\pi r$ ).



**Obr. 4.4:** Meridiánový řez u různých typů kruhových a mezikruhových desek [3].



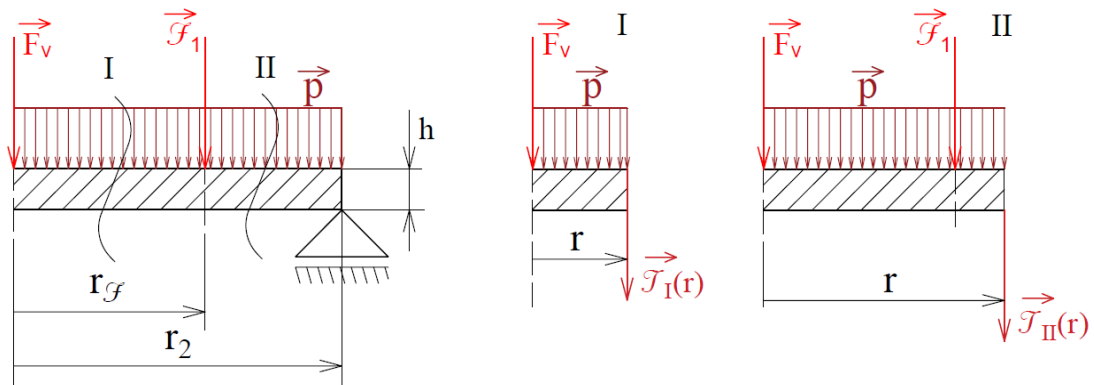
**Obr. 4.5:** Meridiánový řez zatížené **a)** kruhové desky vyrobené z houževnatého materiálu, **b)** mezikruhové desky vyrobené z křehkého materiálu.

## 2. Vyjádření liniové posouvající síly $\mathcal{T}(r)$ v závislosti na zatížení desky.

Každá úloha je naprogramovaná tak, že je deska rozdělena na dva intervaly, pro které platí:

$$I: r \in \langle r_1, r_F \rangle; \quad II: r \in \langle r_F, r_2 \rangle. \quad (4.1)$$

Rovnice liniových posouvajících sil v jednotlivých intervalech závisí na typu desky (jestli uvolňujeme z vnitřní strany nebo z vnější strany) a na zatížení typu  $p$ ,  $\mathcal{F}_1$  a  $F_v$ .



**Obr. 4.6:** Uvolňování desky typu A1.

Rovnice liniových posouvajících sil pro desky typu **A1**, **A2**, **A3**, **A4**, **A8** (obr. 4.6) jsou odvozeny z podmínek rovnováhy:

$$I_1: \quad \sum F_z = 0: \quad \mathcal{T}_I(r) \cdot 2\pi r + (p\pi r^2 - p\pi r_1^2) + F_v = 0, \quad (4.2)$$

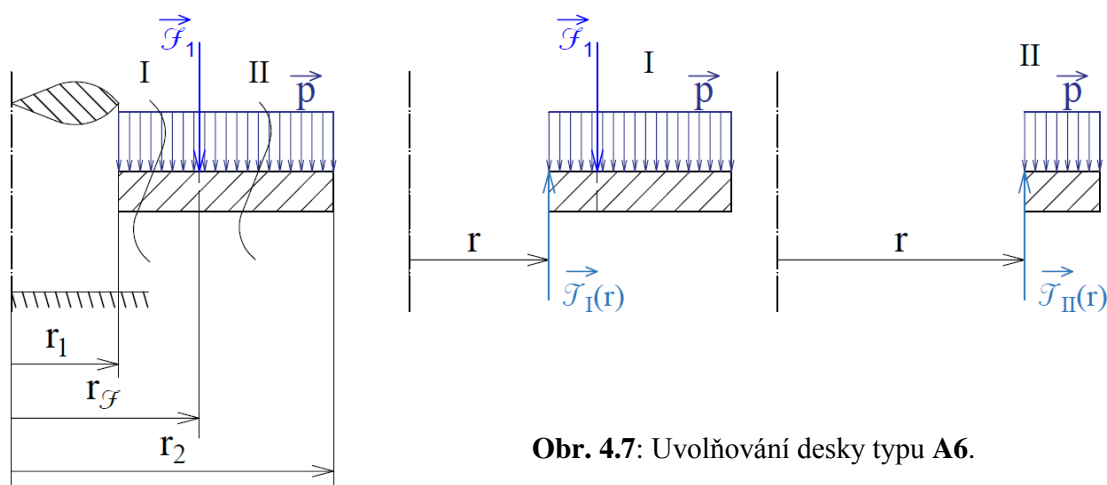
$$I_2: \quad \sum F_z = 0: \quad \mathcal{T}_{II}(r) \cdot 2\pi r + (p\pi r^2 - p\pi r_1^2) + F_v + \mathcal{F}_1 \cdot 2\pi r_F = 0. \quad (4.3)$$

Z rovnic (4.2, 4.3) vyjádříme  $\mathcal{T}(r)$ :

$$I_1: \quad \mathcal{T}_I(r) = -\frac{p}{2}r + \frac{p}{2}\frac{r_1^2}{r} - F_v \frac{1}{2\pi r}, \quad (4.4)$$

$$I_2: \quad \mathcal{T}_{II}(r) = -\frac{p}{2}r + \frac{p}{2}\frac{r_1^2}{r} - F_v \frac{1}{2\pi r} - \mathcal{F}_1 \frac{r_F}{r}. \quad (4.5)$$





Obr. 4.7: Uvolňování desky typu A6.

Rovnice liniových posouvajících sil pro desky typu A5, A6, A7 (obr. 4.7) jsou odvozeny z podmínek rovnováhy:

$$I_1: \quad \sum F_z = 0: \quad T_I(r) \cdot 2\pi r - (p\pi r_2^2 - p\pi r^2) - F_1 \cdot 2\pi r_f = 0, \quad (4.6)$$

$$I_2: \quad \sum F_z = 0: \quad T_{II}(r) \cdot 2\pi r - (p\pi r_2^2 - p\pi r^2) = 0. \quad (4.7)$$

Z rovnic (4.6, 4.7) vyjádříme  $T(r)$ :

$$I_1: \quad T_I(r) = -\frac{p}{2}r + \frac{p}{2}\frac{r_2^2}{r} + F_1 \frac{r_f}{r}, \quad (4.8)$$

$$I_2: \quad T_{II}(r) = -\frac{p}{2}r + \frac{p}{2}\frac{r_2^2}{r}. \quad (4.9)$$

Zatížení liniovými momenty  $m_r, m_t$  nemá vliv na  $T(r)$ . Avšak radiální moment  $m_r$  bude vystupovat v okrajových podmínkách a podmínkách spojitosti. Orientace tohoto momentu je odvozena od místa na desce, kde moment působí, bude tedy zavedena znaménková konvence řídící se následujícími pravidly.

a) Radiální moment  $m_1$  působí na vnitřním okraji desky (poloměr  $r_1$ ):

$$\text{Proti směru hodinových ručiček:} \quad m_{rI}(r_1) = -m_1, \quad (4.10)$$

$$\text{Po směru hodinových ručiček:} \quad m_{rI}(r_1) = +m_1. \quad (4.11)$$

b) Radiální moment  $m_2$  působí na vnějším okraji desky (poloměr  $r_2$ ):

$$\text{Proti směru hodinových ručiček:} \quad m_{rII}(r_2) = +m_2, \quad (4.12)$$

$$\text{Po směru hodinových ručiček:} \quad m_{rII}(r_2) = -m_2. \quad (4.13)$$

c) Radiální moment  $m$  působí na poloměru desky  $r_f$ :

$$\text{Proti směru hodinových ručiček:} \quad m_{rI}(r_f) - m = m_{rII}(r_f), \quad (4.14)$$

$$\text{Po směru hodinových ručiček:} \quad m_{rI}(r_f) + m = m_{rII}(r_f). \quad (4.15)$$

### 3. Vyřešení diferenciální rovnice desky pro natočení.

Soustava diferenciálních rovnic pro natočení (3.17) se v aplikaci řeší funkcí *dsolve*, čímž jsou získány vztahy pro natočení v závislosti na integračních konstantách  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$I_1: \quad \vartheta_I(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \vartheta_{pI}, \quad (4.16)$$

$$I_2: \quad \vartheta_{II}(r) = C_3 r + \frac{C_4}{r} + \vartheta_{pII}, \quad (4.17)$$

kde  $\vartheta_{pI}$ , resp.  $\vartheta_{pII}$  je partikulární řešení, jehož tvar závisí na  $\mathcal{T}_I(r)$ , resp.  $\mathcal{T}_{II}(r)$  [3].

Následně jsou vyjádřeny rovnice pro radiální momenty  $m_{rI}(r)$ ,  $m_{rII}(r)$  v jednotlivých intervalech, také v závislosti na  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Integrační konstanty jsou vyřešeny z okrajových podmínek a podmínek spojitosti (tab. 4.1) pro natočení a radiální momenty. Vznikne soustava 4 rovnic o 4 neznámých, ze které jsou vyjádřeny tyto konstanty. Ty jsou dosazeny zpátky do vztahů pro natočení a radiální momenty. Jsou vyjádřeny také rovnice pro obvodové momenty  $m_{tI}(r)$ ,  $m_{tII}(r)$ .

#### 4. Vyjádření rovnice průhybu.

Vztahy pro průhyb v jednotlivých intervalech jsou získány z rovnice (2.21), kdy jsou rovnice pro natočení integrovány podle poloměru následujícím způsobem:

$$I_1: \quad w_I(r) = \int \vartheta_I(r) dr, \quad (4.18)$$

$$I_2: \quad w_{II}(r) = \int \vartheta_{II}(r) dr. \quad (4.19)$$

Z důvodu neurčitého integrování jsou získány průhybové rovnice v závislosti na integračních konstantách, které budou pro první, resp. druhý interval označeny  $K_1$ , resp.  $K_2$ .

Integrační konstanty jsou také vyřešeny z okrajových podmínek a podmínek spojitosti (tab. 4.1), tentokrát však pro průhyb. Hodnoty  $K_1$  a  $K_2$  jsou dosazeny zpátky do vztahů pro průhyb.

#### 5. Vyjádření rovnic napětí.

Pro vyjádření rovnic radiálních a obvodových napětí budou využity rovnice statické ekvivalence (3.13), kdy jsou rovnice rozšířeny o proměnnou  $z$ :

$$\begin{Bmatrix} m_r \\ m_t \end{Bmatrix} z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \end{Bmatrix} z^2 dz. \quad (4.20)$$

Po integraci a vyjádření napětí vzniknou vztahy:

$$\sigma_r(r, z) = \frac{12m_r}{h^3} z, \quad \sigma_t(r, z) = \frac{12m_t}{h^3} z. \quad (4.21)$$

Maximální hodnoty napětí na povřích, kde  $z = \pm \frac{h}{2}$ , jsou tedy:

$$\sigma_{r,ex}(r) = \pm \frac{6m_r}{h^2}, \quad \sigma_{t,ex}(r) = \pm \frac{6m_t}{h^2}. \quad (4.22)$$

#### 6. Zobrazení výsledků

Po vyřešení úlohy (body 3-5) se zobrazí následující výstupy:

a) Okno s maximálními hodnotami pro  $\vartheta, w, m_r, m_t, \sigma_r, \sigma_t$  a s bezpečností  $k$  dle příslušného MS. Součástí každé této veličiny je i poloměr  $r$ , ve kterém se výstupní charakteristiky nachází.

b) Grafy, zobrazující:

- závislost maximálního radiálního  $\sigma_{r,ex}$  a obvodového  $\sigma_{t,ex}$  napětí na tloušťce desky  $h$

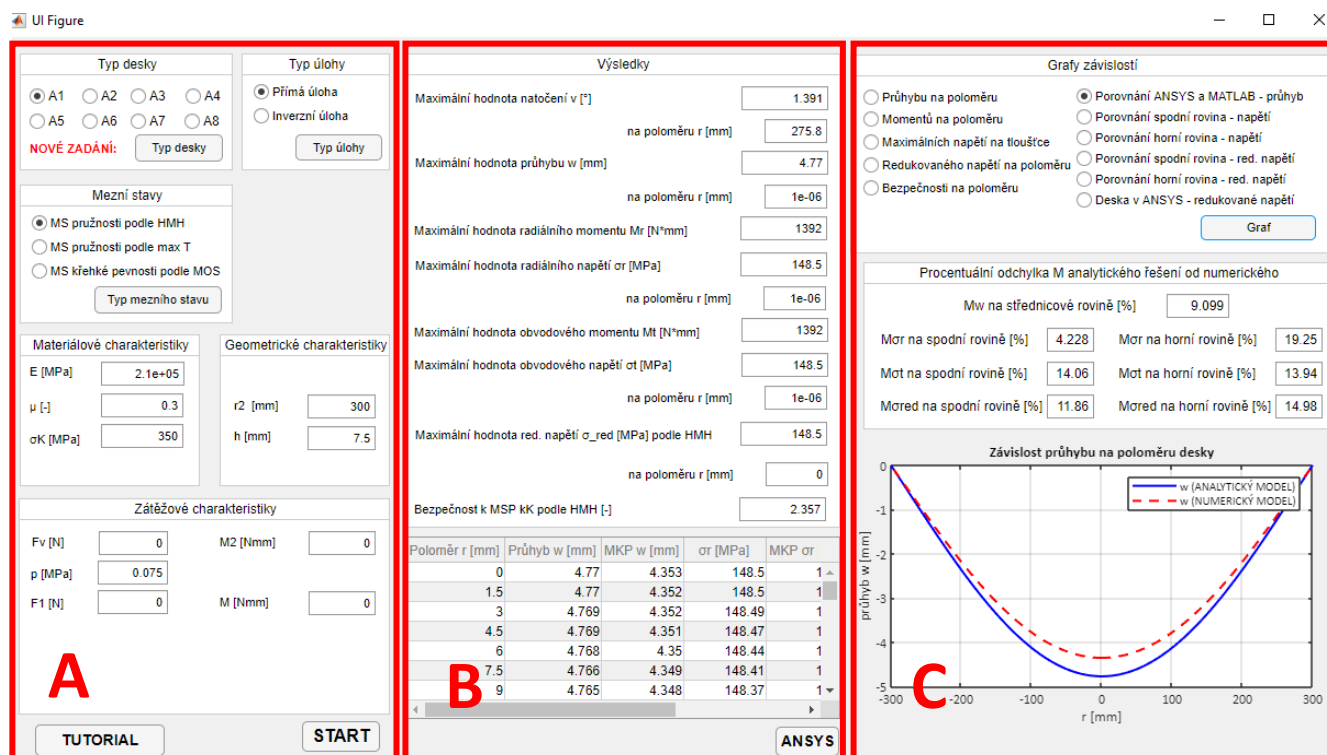
- závislost radiálního  $m_r$  a obvodového  $m_t$  momentu na poloměru desky  $r$
- závislost průhybu  $w$  na poloměru desky  $r$
- závislost redukovaného napětí  $\sigma_{red}^{HH}$ , resp.  $\sigma_{red}^{maxT}$  na poloměru desky  $r$

c) Tabulka s 201 hodnotami (počet hodnot vychází ze zvoleného měřítka  $(r_2 - r_1)/200$ ) pro  $w$ ,  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  rozloženými rovnoměrně po poloměru desky  $r$ .

**Tab. 4.1:** Okrajové podmínky a podmínky spojitosti pro různé typy nezatížených desek.

Typ desky	Okrajové podmínky	Podmínky spojitosti
<b>A1</b>	$r = 0: \quad \vartheta_I = 0; C_2 = 0$ $r = r_2: \quad m_{rII} = 0$ $w_{II} = 0$	$r = r_{\mathcal{F}}: \quad \begin{aligned} \vartheta_I &= \vartheta_{II} \\ m_{rI} &= m_{rII} \\ w_I &= w_{II} \end{aligned}$
<b>A2</b>	$r = 0: \quad \vartheta_I = 0; C_2 = 0$ $r = r_2: \quad \vartheta_{II} = 0$ $w_{II} = 0$	
<b>A3</b>	$r = r_1: \quad m_{rI} = 0$ $r = r_2: \quad m_{rII} = 0$ $w_{II} = 0$	
<b>A4</b>	$r = r_1: \quad m_{rI} = 0$ $r = r_2: \quad \vartheta_{II} = 0$ $w_{II} = 0$	
<b>A5</b>	$r = r_1: \quad m_{rI} = 0$ $r = r_2: \quad m_{rII} = 0$ $r = r_1: \quad w_I = 0$	
<b>A6</b>	$r = r_1: \quad \vartheta_I = 0$ $r = r_2: \quad m_{rII} = 0$ $r = r_1: \quad w_I = 0$	
<b>A7</b>	$r = 0: \quad \vartheta_I = 0; C_2 = 0$ $r = r_2: \quad m_{rII} = 0$ $r = 0: \quad w_I = 0; K_1 = 0$	
<b>A8</b>	$r = r_1: \quad \vartheta_I = 0$ $r = r_2: \quad \vartheta_{II} = 0$ $w_{II} = 0$	

Výpočetní program byl vytvořen s pomocí příručky k SW MATLAB [8] a komunitního centra pro MATLAB [9]. Kompletní GUI po realizovaném výpočtu je zobrazeno na obr. 4.8.



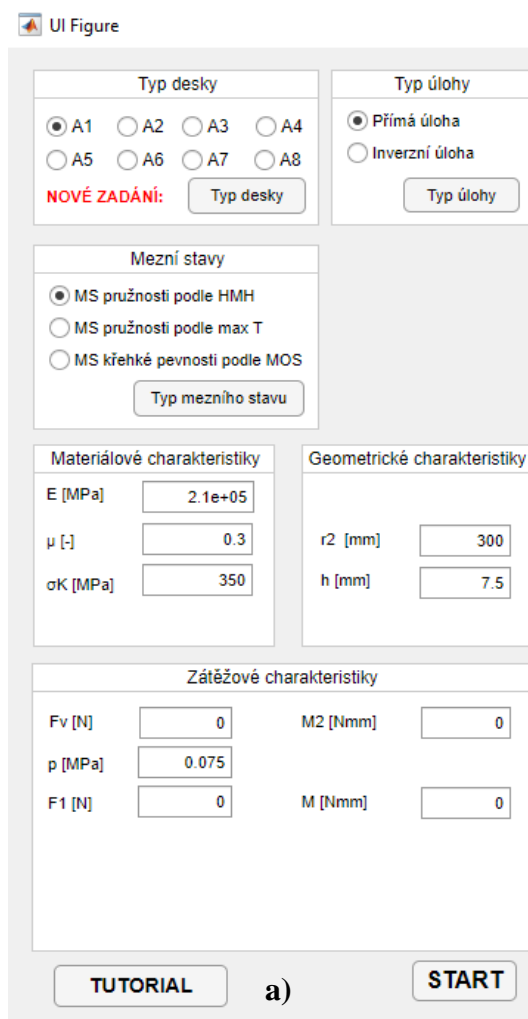
Obr. 4.8: Kompletní grafické uživatelské rozhraní (GUI) vytvořeného výpočetního nástroje.

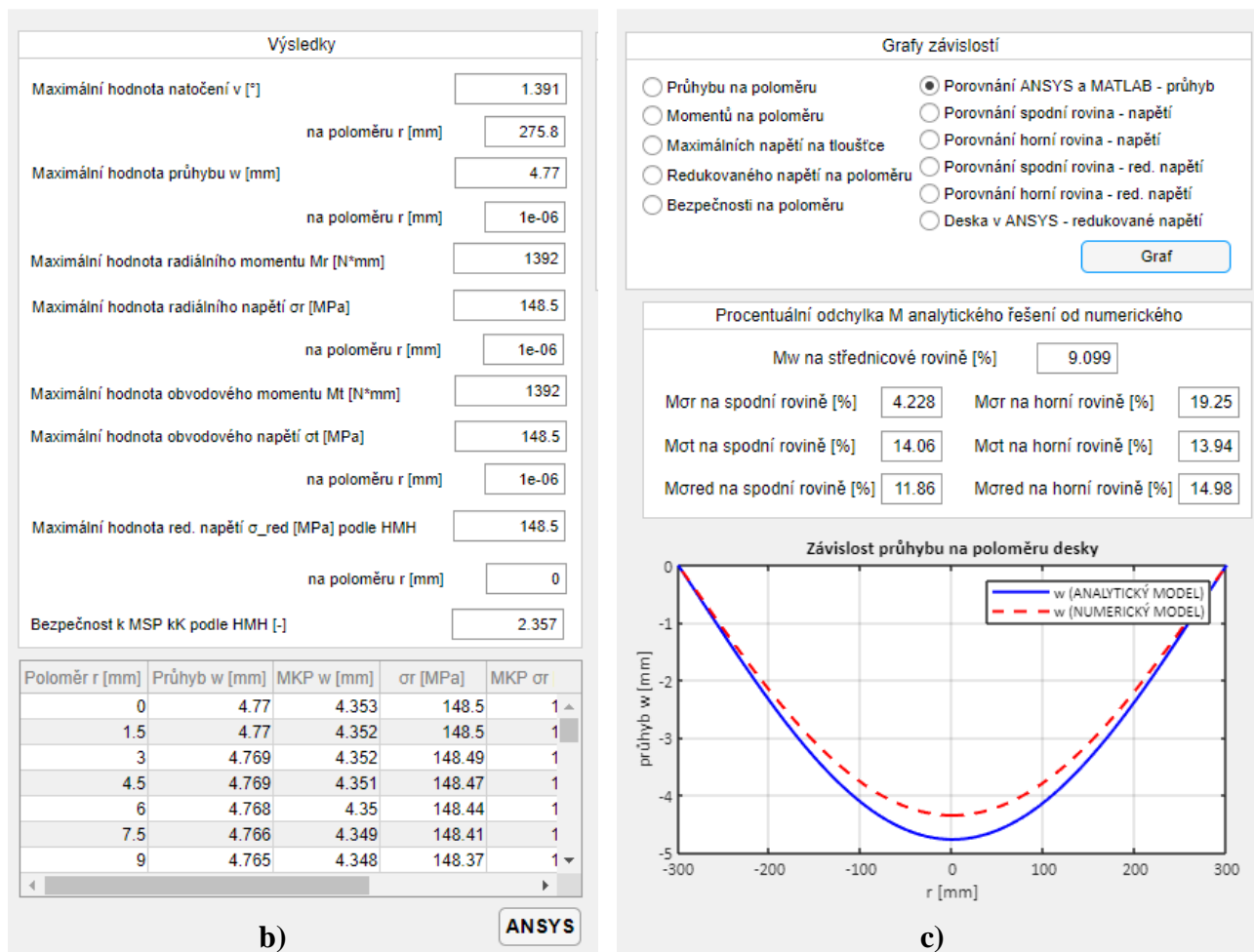
GUI na obr. 4.8 je rozdělena kvůli přehlednosti na 3 části, které budou jednotlivě zobrazeny v samostatných ilustracích (obr. 4.9 a,b,c).

Na obr. 4.9a lze vidět okna jednotlivých vstupních parametrů. Jsou to okna pro výběr typu desky, typu úlohy, mezního stav, materiálových, geometrických a zatěžovacích charakteristik. Spolu s těmito komponenty jsou na téhle části GUI i tlačítka TUTORIAL (zapne nebo vypne nápovědu v aplikaci) a START (spustí výpočet).

Na obr. 4.9b je zobrazeno okno se všemi maximálními hodnotami různých napěťových a deformačních veličin na desce, včetně místa, kde se tyto hodnoty nacházejí. Součástí tohoto okna GUI je i tabulka s hodnotami pro  $w$ ,  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  rozloženými rovnoměrně po poloměru desky a to jak pro analytické, tak i pro numerické řešení za předpokladu velkých deformací. Je zde také přítomné tlačítko ANSYS, jehož funkce bude vysvětlena v další podkapitole.

Na obr. 4.9c je vidět poslední část GUI, kde si uživatel může zvolit typ závislosti v okně Grafy závislosti. Takovýto graf se zobrazí v pravém dolním rohu GUI. Dále je k dispozici průměrná absolutní procentuální odchylka analytického řešení od numerického, která bude v kapitole 5 definována.





**Obr. 4.9:** Grafické uživatelské rozhraní pro a) část A, b) část B, c) část C dle obr. 4.8.

## 4.2 Ansys v batch módu

Součástí aplikace je možnost numerického výpočtu pomocí MKP v programu ANSYS MECHANICAL. Průběh výpočtu je realizován v několika krocích, které se provedou po stisknutí tlačítka ANSYS v GUI, aniž by uživatel musel dělat něco dalšího. Tomuto procesu bez účasti uživatele a dalších interakcí v SW ANSYS se říká „*Batch processing*“ [10].

Ke zprovoznění této funkce je zapotřebí nastavit cestu k SW ANSYS a zvolit, kterou licenci a verzi softwaru bude uživatel používat. K nastavení těchto parametrů pro konkrétní PC slouží textový dokument *ANSYS.txt*, který lze nalézt v souboru spolu s aplikací.

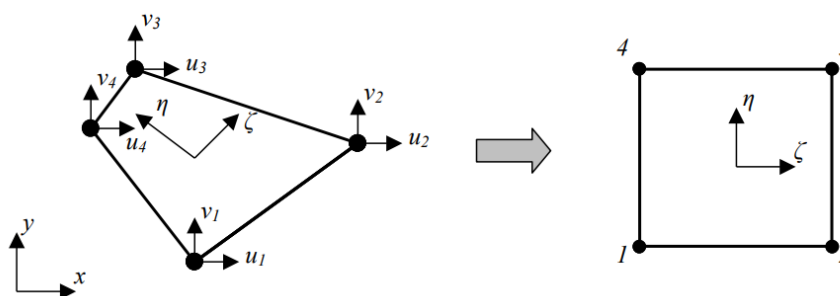
Celý proces pak vychází ze souboru *BATCH.mac*, kde je sepsaný kód v jazyku APDL (interní jazyk SW ANSYS) a je také součástí souboru s aplikací vytvořené v rámci této práce. V prvním kroku se vstupní hodnoty z výpočetního nástroje importují do APDL kódu. V SW MATLAB je příkazový řádek, který umožní spuštění programu ANSYS MECHANICAL na pozadí, dále zajistí import APDL kódu do tohoto softwaru. Průběh celého procesu, včetně importovaných vstupních parametrů, kompletního APDL kódu, případných upozornění ve formě „WARNINGS“ a „ERRORS“ a mnoha dalších detailů, je po dokončení výpočtu sepsán v dokumentu *PRE.txt*, který se vygeneruje ve složce s aplikací. [11].

### 4.2.1 APDL kód pro analýzu desky v SW ANSYS

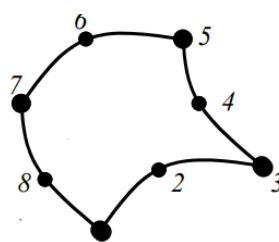
První věcí, kterou je v APDL kódu potřeba předepsat, je typ prvku, ze kterého bude tvořena konečnoprvková síť. Pro co nejjednodušší realizaci modelu bude využita vlastnost rotační symetrie. Tato vlastnost umožní modelovat pouze řez desky od středu k jejímu okraji, čímž se zredukuje problém na rovinnou úlohu. S přihlédnutím k těmto parametrům bude nejvhodnější využít rovinných čtvercových prvků PLANE182 nebo PLANE183 [7].

Prvek PLANE182 je lineární čtvercový prvek, který je tvořen 4 uzly ve vrcholech, každý se dvěma deformačními parametry (obr. 4.10).

Prvek PLANE183 je kvadratický čtvercový prvek, tvořený 8 uzly, každý také se dvěma deformačními parametry (obr. 4.11). Zde umocněním básových funkcí vznikají členy  $\zeta^2$ ,  $\eta^2$ , proto se prvek označuje jako kvadratický.



Obr. 4.10: Prvek PLANE182 v kartézském a přirozeném souřadnicovém systému [7].



Obr. 4.11: Prvek PLANE183 [7].

V této práci budou numerické modely vytvářeny z prvků PLANE183, jelikož díky kvadratické báze funkci nabízí přesnější řešení i pro hrubší síť v porovnání s jeho lineární verzí. Operační náročnost u takhle jednoduchého modelu je velmi nízká.

Další věcí, kterou je potřeba předepsat, jsou materiálové a geometrické charakteristiky. U materiálových parametrů je pro řešený typ úlohy dostačující předepsání veličin  $E$  a  $\mu$ . Geometrie je vytvořena příkazem *BLC4*, čímž se vygeneruje řez deskou ve tvaru obdélníku o příslušných rozměrech (obr. 4.11a).

Poté je vytvořena konečnoprvková síť. Velikost elementu je dána vztahem  $(r_2 - r_1)/100$ . U několika typů desek byla síť zjemňována, výsledky se však příliš nelišili. Proto je tato velikost prvku ponechána jako výchozí (obr. 4.11a).

Osmdesát okrajových podmínek je předepsáno za pomoci podmínky *IF* (obr. 4.11b). V SW ANSYS se vytvoří vazba, která odpovídá typu desky, zvolenému v GUI v aplikaci.

Zatížení není realizováno pomocí podmínky *IF*. Pokud je však ve výpočetním nástroji některé zatížení nulové, pak je nulové i v APDL kódu. Takové zatížení se poté vůbec v SW ANSYS při samotném výpočtu nijak neprojeví.

Po vyřešení dané úlohy se vytvoří cesta (příkaz *PATH*) na dolním a horním okraji řezu desky, resp. na střednicové rovině (přímka, která podélně půlí řez desky) a výsledky napětí, resp. průhybu na těchto cestách se importují do výpočetního nástroje, kde jsou numerické výsledky porovnány s těmi analytickými.

APDL kód byl psán za pomoci ANSYS manuálu [12].

/inp,parameters,inp /PREP7		!! Okrajové podmínky !! *IF,A,EQ,1,THEN FLST,2,1,3,ORDE,1 FITEM,2,2 /GO DK,P51X,,0,0,UY,ROTX,ROTY,, , ,	!typ desky A1
!! Element pro mesh desky !! ET,1,PLANE183 KEYOPT,1,1,0 KEYOPT,1,3,1 KEYOPT,1,6,0	!typ elementu	*ELSEIF,A,EQ,2 FLST,2,1,4,ORDE,1 FITEM,2,2 /GO DL,P51X,,UX,0 DK,2,ALL	!typ desky A2
!! Materiál !! MPTEMP,,,,,,,, MPTEMP,1,0 MPDATA,EX,1,,E MPDATA,PRXY,1,,mi	!Youngův modul pružnosti (E) !Poissonovo číslo (mi)	*ELSEIF,A,EQ,3 FLST,2,1,3,ORDE,1 FITEM,2,2 /GO DK,P51X,,0,0,UY,ROTX,ROTY,, , ,	!typ desky A3
!! Geometrie !! BLC4,r1,0,(r2-r1),h	!vytvoří čtyřúhleník x(r1),y,délka(r2),výška(h)	*ELSEIF,A,EQ,4 FLST,2,1,4,ORDE,1 FITEM,2,2 /GO DL,P51X,,UX,0 DK,2,ALL	!typ desky A4
!! Síť !! ALLSEL,ALL ESIZE,(r2-r1)/100 AMESH,ALL	!vybere znovu všechny entity !nastavení velikosti prvku pro meshování plochy !provede mesh	*ELSEIF,A,EQ,5 FLST,2,1,3,ORDE,1 FITEM,2,1 /GO DK,P51X,,0,0,UY,ROTX,ROTY,, , ,	!typ desky A5
!! Pomocný element pro aplikování radiálního momentu !! ET,2,MPC184 KEYOPT,2,1,1 KEYOPT,2,2,0		*ELSEIF,A,EQ,6 FLST,2,1,4,ORDE,1 FITEM,2,4 /GO DL,P51X,,UX,0 DK,1,ALL	!typ desky A6

**Obř. 4.11:** Ukázka APDL macro kódu pro **a)** element, materiál, geometrii a síť **b)** část okrajových podmínek.

**Obr. 4.11:** Ukázka APDL macro kódu pro **a)** element, materiál, geometrii a síť **b)** část okrajových podmínek.

## 5. Porovnání analytického a numerického modelu

Tato kapitola bude věnována porovnání analytického a numerického modelu, kde budou postupně měněny různé parametry desky a v závislosti na nich budou sledovány rozdíly ve výsledcích průhybu a napětí.

V podkapitole 2.3 bylo definováno několik typů desek a to v závislosti na podílu  $w/h$  a  $a/h$ , kde  $w$  je průhyb,  $h$  je tloušťka a  $a$  je nějaký charakteristický rozměr desky. Tyto parametry určují, o jaký typ desky se z hlediska velikostí průhybu a rozměrů jedná. V této kapitole bude zkoumáno, jak se výsledky analytických a numerických modelů budou od sebe lišit v závislosti na změnách podílů  $w/h$  a  $a/h$ .

Numerický model v SW ANSYS MECHANICAL bude zohledňovat geometrickou nelinearitu. Nelineární chování tenkých desek je užitečné pro teorii velkých průhybů, kdy je bráno v potaz ohýbání i protahování střednicové roviny. V případě velkých deformací, příčná deformace (průhyb) způsobí významné síly v rovině desky [13,14]. Analytické řešení tuto skutečnost nezohledňuje. Předpoklad velkých deformací se v SW ANSYS aktivuje pomocí příkazu *NLGEOM,ON*.

Výchozím parametrem provedených analýz bude průměrná absolutní procentuální odchylka analytického řešení od numerického [15]:

$$M_X = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{X_{iNUM} - X_{iANAL}}{X_{iNUM}} \right|, \quad (5.1)$$

Kde  $n$  je počet absolutních procentuálních odchylek po celé délce desky. Index  $X$  bude nahrazen postupně hodnotami průhybu  $w$  a napětí  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  a  $\sigma_{red}^{HMH}$  po celé délce desky na obou površích.

Pro účely práce jsou určeny tyto podmínky:

- $M_X < 5\%$  - analytický výsledek je dostatečně přesný, platí desková teorie.
- $5\% < M_X < 10\%$  - analytický výsledek je stále přijatelný, desková teorie je ještě použitelná.
- $M_X > 10\%$  - analytický výsledek je příliš odlišný, desková teorie již neplatí.

Cílem této kapitoly je ukázat, za jakých předpokladů lze použít analytickou teorii desek, a poskytnout uživateli informaci o tom, jaké chyby se jejím použitím dopouští v porovnání s řešením zahrnujícím velké deformace. Většina grafů a výsledků byla získána za použití vytvořeného výpočetního nástroje.

Další statistická metoda, která by mohla být v práci využita, je absolutní procentuální odchylka v místě maximálního rozdílu analytického řešení od numerického. Čtenář si v následujících podkapitolách bude moci prohlédnout grafy různých závislostí. Z grafů závislosti průhybu na poloměru desky (např. obr. 5.4) je patrné, že největší rozdíl mezi řešeními je v místě maximálního průhybu, zde konkrétně ve středu desky. Mohlo by se tedy zdát, že procentuální odchylka v tomto místě bude odhadem dvakrát vyšší, než průměrná procentuální odchylka analytického řešení od numerického po celé desce. S rostoucí vzdáleností směrem od středu desky k jejímu uložení klesá rozdíl mezi numerickým a analytickým řešením průhybu, ale klesá také i hodnota samotného průhybu desky. To znamená, že procentuální rozdíl řešení průhybu zůstává po celé délce přibližně konstantní. Bylo zjištěno, že absolutní procentuální odchylka analytického a numerického řešení průhybu v místě největšího rozdílu je maximálně o třetinu vyšší, než je průměrná procentuální odchylka těchto řešení po celé desce.



V rámci analyzování výsledků radiálního, obvodového a redukovaného napětí podle HMM bude možné v následujících podkapitolách pozorovat, že na grafech závislosti těchto napětí na poloměru jsou oblasti, kde je rozdíl mezi řešeními opravdu výrazný oproti zbytku grafu (např. okraj desky na obr. 5.2). V některých případech je výrazný rozdíl řešení mezi analytickým a numerickým modelem způsobený zatížením od liniové síly nebo radiálního momentu. Pokud by byla spočtena procentuální odchylka analytického řešení od numerického pouze v místech maximálních rozdílů, neměla by analýza tak kvalitní vypovídající hodnotu o celé závislosti.

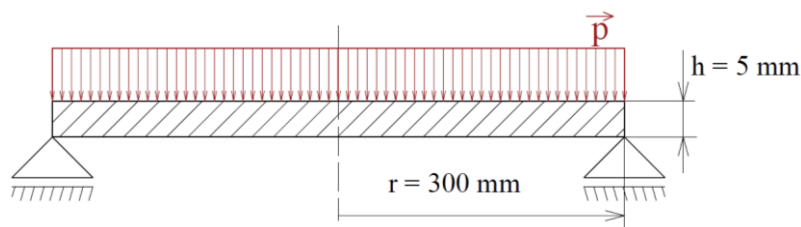
Z těchto důvodů není tato statistická metoda v práci použita.

## 5.1 Vliv průhybu na přesnost analytického modelu

První analýza bude prováděna v závislosti na podílu  $w_{max}/h$ , kdy bude zvětšován maximální průhyb desky  $w_{max}$  (dále pouze  $w$ ) při konstantní tloušťce  $h$ . Toho bude docíleno zvyšováním zátěže. Bude porovnáváno několik typů desek s různými geometrickými a zatěžovacími charakteristikami tak, aby výsledky mohli být co nejpřesněji zobecněny.

### 5.1.1 Analýza kruhové desky typu A1, zatížená tlakem

Prvním typem modelu, který bude řešen, je kruhová deska, podepřená na okrajích a zatížená rovnoměrným tlakovým zatížením  $p$  po celé ploše (obr. 5.1). Deska je vyrobena z oceli.



Obr. 5.1: Meridiánový řez deskou typu A1, zatíženou tlakem  $p$ .

**Tab. 5.1:** Průměrná absolutní procentuální odchylka analytického řešení od numerického pro průhyb a napětí na dolním povrchu za předpokladu velkých a malých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.

$h = -2,5 \text{ mm}$ pro $\sigma$ , $h = 0 \text{ mm}$ pro $w$			Předpoklad velkých deformací				Předpoklad malých deformací			
$w$ [mm]	$w/h$ [-]	$p$ [kPa]	$M_w$ [%]	$M_{\sigma r}$ [%]	$M_{\sigma t}$ [%]	$M_{\sigma red}$ [%]	$M_w$ [%]	$M_{\sigma r}$ [%]	$M_{\sigma t}$ [%]	$M_{\sigma red}$ [%]
0,2	0,04	0,9317	0,03	1,6	0,6	0,7	0,07	1,1	0,03	0,04
0,5	0,1	2,329	0,2	2,3	1,6	1,6	0,04	1,1	0,00	0,00
1	0,2	4,659	1,1	3,1	3,2	3,1	0,04	1,2	0,01	0,00
1,5	0,3	6,988	2,3	3,5	4,9	4,6	0,04	1,2	0,01	0,00
2	0,4	9,317	3,9	3,4	7,0	6,0	0,04	1,1	0,01	0,01
2,5	0,5	11,65	5,8	3,2	9,6	8,1	0,03	1,1	0,01	0,00
3	0,6	13,98	8,0	3,6	12,9	11,0	0,04	1,2	0,01	0,00
3,5	0,7	16,31	10,4	4,2	16,4	14,1	0,06	1,1	0,01	0,01

V tab. 5.1 lze vidět průměrné procentuální odchýlení analytických výsledků od numerických na dolním povrchu desky a to jak za předpokladu velkých, tak malých deformací. Při malých deformacích se řešení neliší i při větších průhybech. Geometrická nelinearita je totiž v SW ANSYS MECHANICAL vypnutá příkazem *NLGEOM, OFF*. Stejně jako v analytickém řešení se nebere v potaz změna délky střednicové roviny a to je i důvod,

proč výsledky vypadají jako přesné i při větší deformaci. Předpoklad malých deformací v dalších analýzách zkoumán nebude, protože z hlediska výsledků není zajímavý.

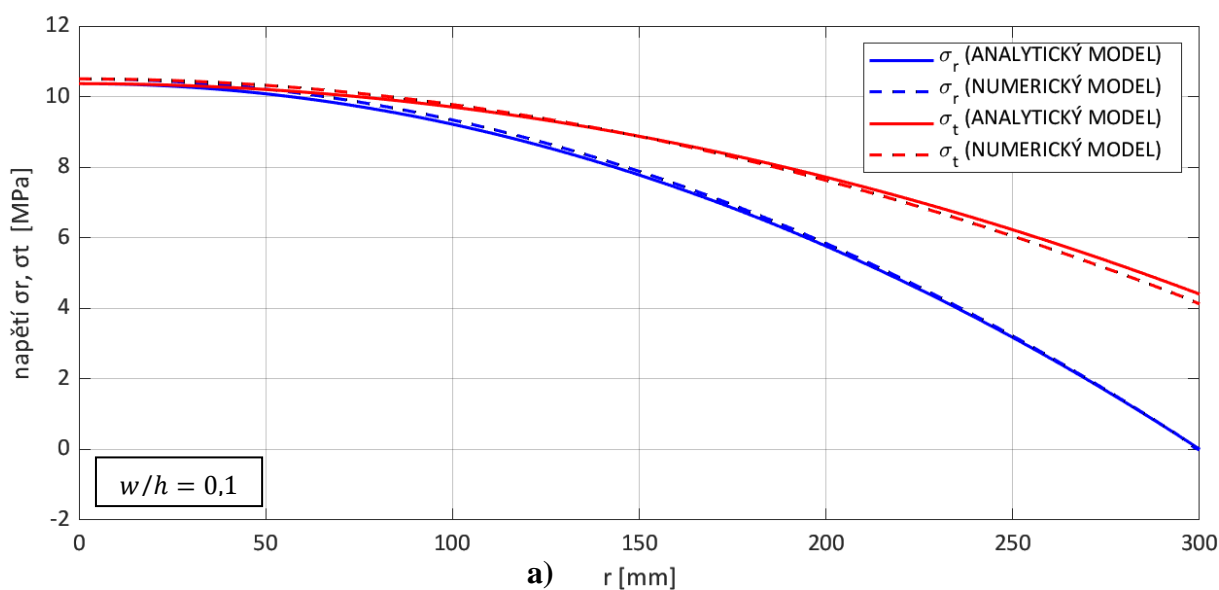
Předpoklad velkých deformací změnu délky střednicové roviny zohledňuje, což způsobuje při zvětšujícím se tlakovém zatížení větší průměrné procentuální odchylky numerického řešení od analytického. Na dolním povrchu získáme přesné analytické výsledky do  $w/h = 0,3$ , včetně. Pro vyšší hodnoty tohoto poměru již odchylky u  $\sigma_t$  a  $\sigma_{red}$  přesáhnou stanovenou hranici 5 %. Výsledky lze stále považovat za přijatelné a to až do  $w/h = 0,5$ , včetně. Při  $w/h = 0,6$  již chyba přesáhne stanovenou kritickou hranici 10 % pro  $\sigma_t$  a  $\sigma_{red}$ . Při této hodnotě je již desková teorie považována za neplatnou. Zajímavé však je, že i při  $w/h = 0,7$  hodnota odchylky pro radiální napětí  $M_{\sigma r}$  nepřesáhne 5 %. Tento jev bude vysvětlen později.

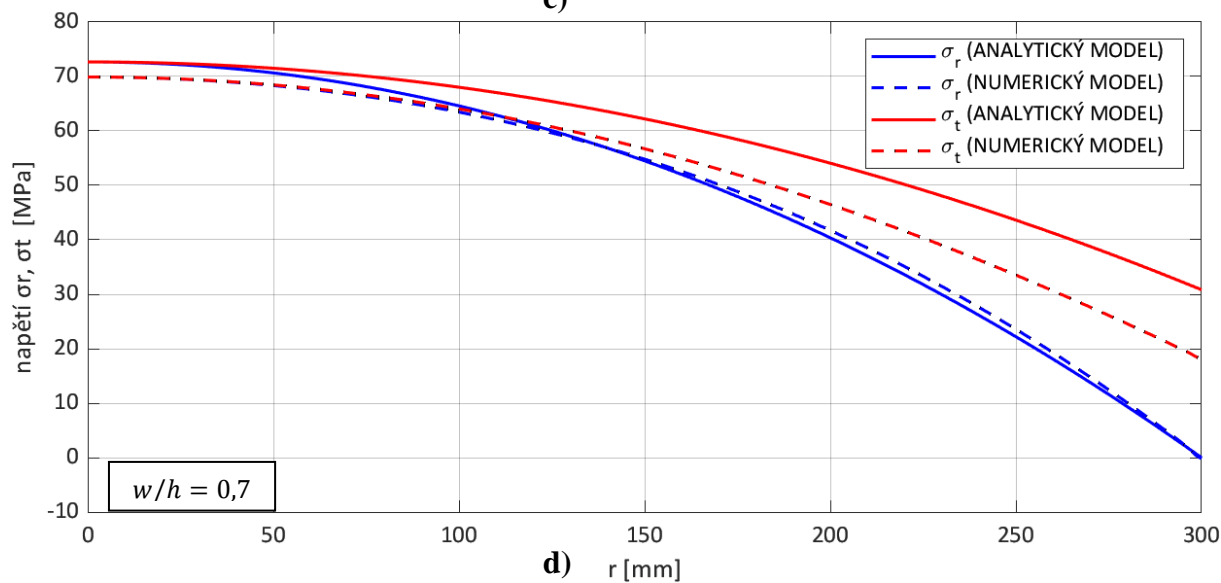
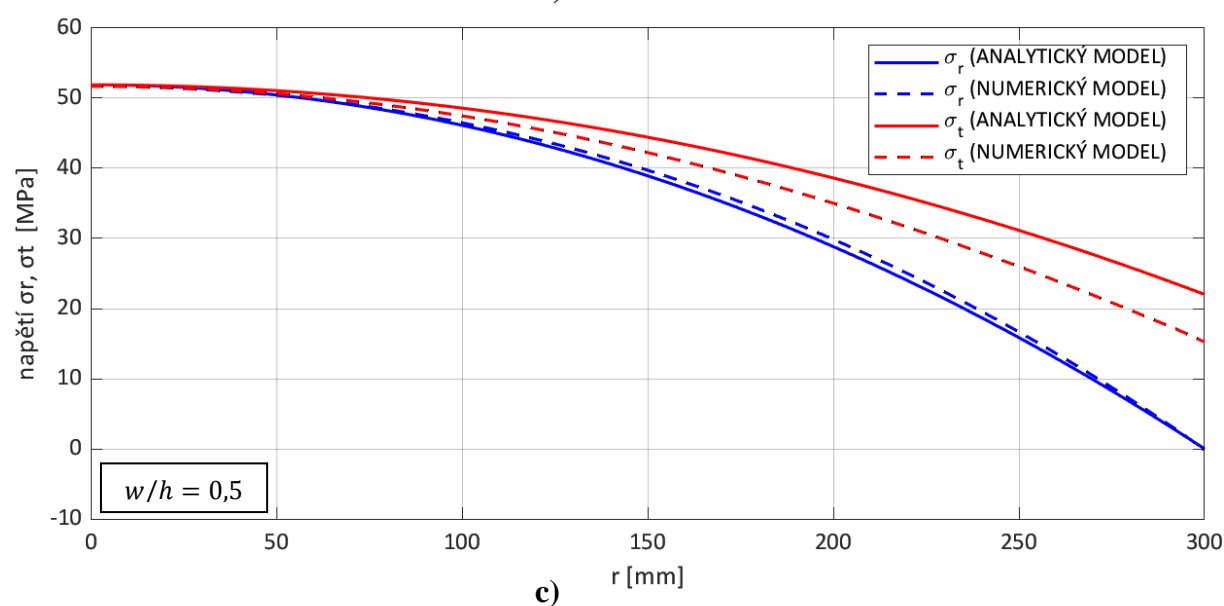
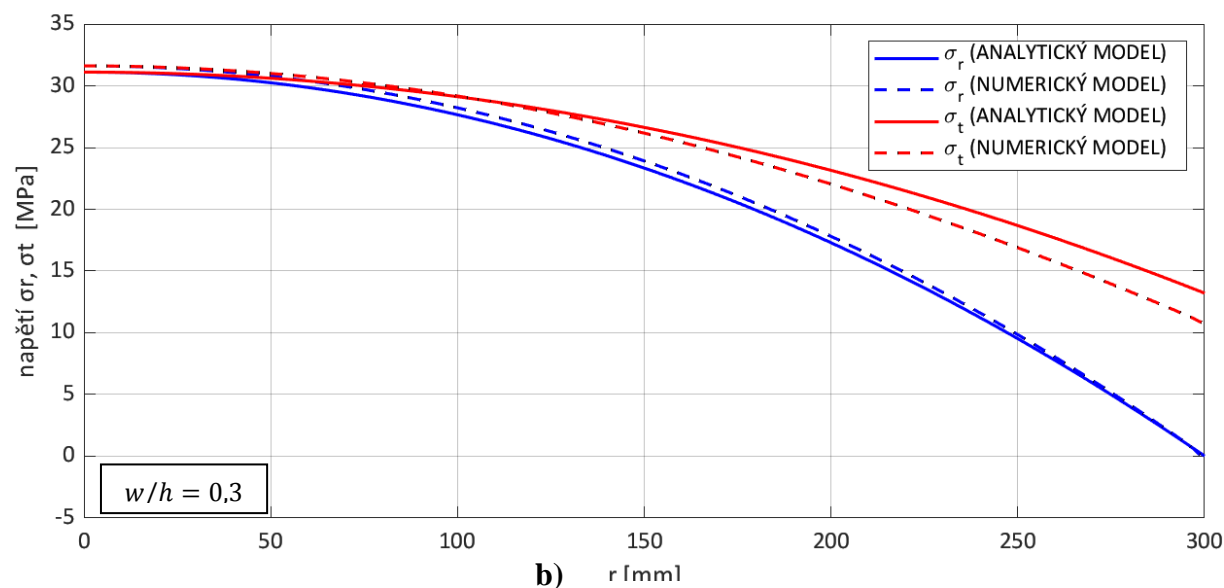
Pro lepší představu jsou na dalších stranách uvedeny grafy (vždy ve 4 různých mutacích podle poměru  $w/h$ ), které umožní vizualizaci tabulkových hodnot.

První sérií grafů jsou závislosti redukovaného a obvodového napětí na poloměru desky (obr. 5.2). Co se týče radiálního napětí, největší rozdíl mezi řešeními se nachází uprostřed desky ( $r = 0$ ). S rostoucí vzdáleností od středu desky se hodnoty  $\sigma_r$  k sobě přibližují a opisují přibližně stejnou funkci i při větším poměru  $w/h$ . U obvodového napětí je průběh opačný. Ve středu je rozdíl numerického a analytického řešení nejmenší a s vzrůstajícím poloměrem se tento rozdíl zvyšuje. Zajímavé je, že při  $w/h = 0,5$  jsou rozdíly mezi analytickým a numerickým řešením v místě  $r = 0$  téměř zanedbatelné.

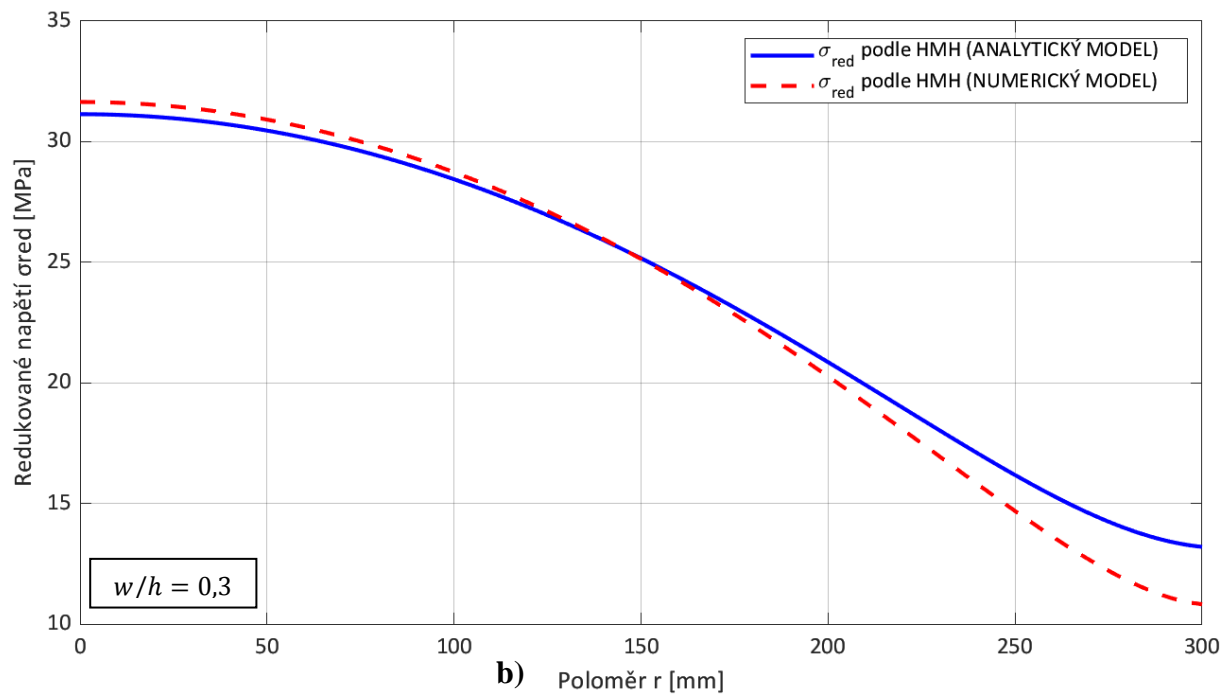
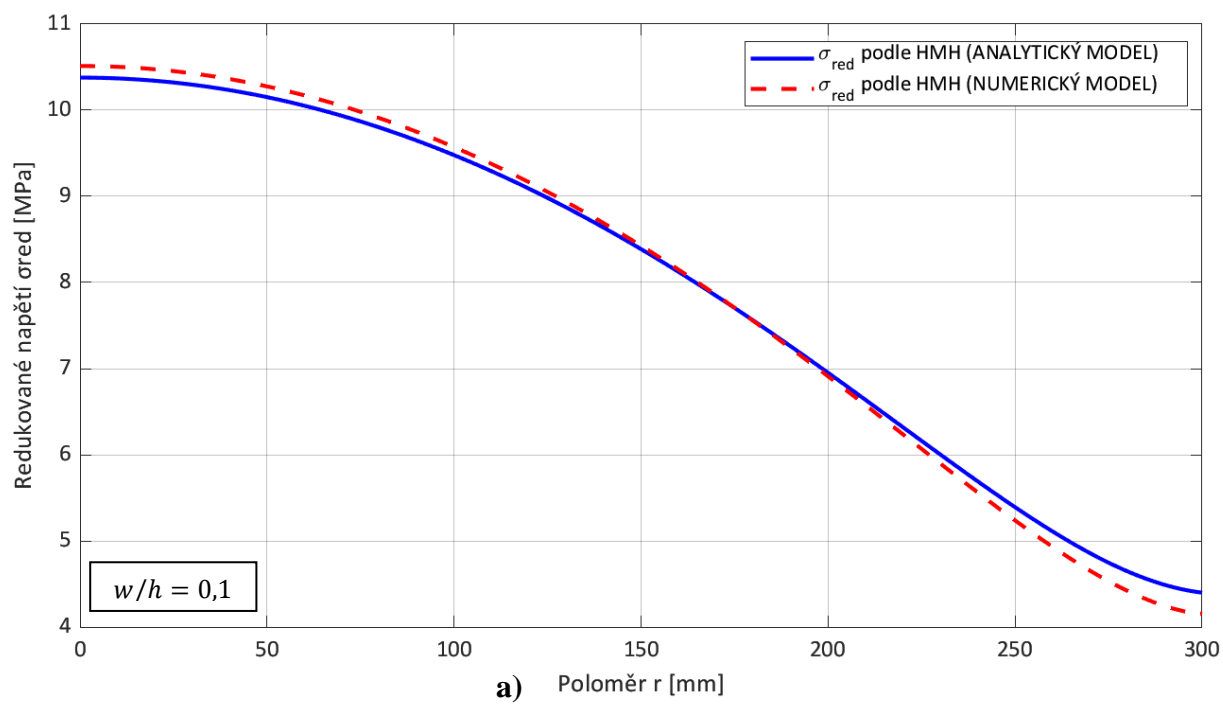
Obr. 5.3 nám ukazuje průběhy redukovaných napětí podle HMM. Největší  $\sigma_{red}$  je v místě  $r = 0$ , střed desky je tedy z hlediska MSP nejkritičtější místo. Pro první dva případy (obr. 5.3 a,b) je redukované napětí vyšší u numerického řešení, pro zbylé modely (obr. 5.3 c,d) je naopak vyšší u toho analytického.

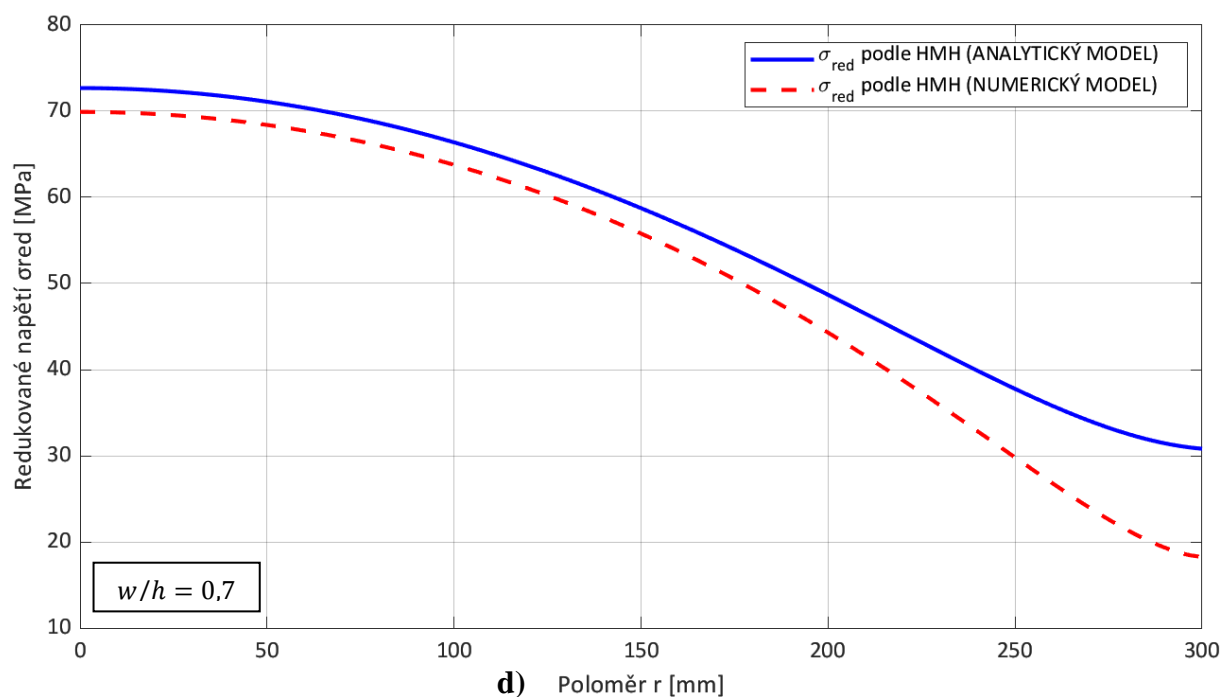
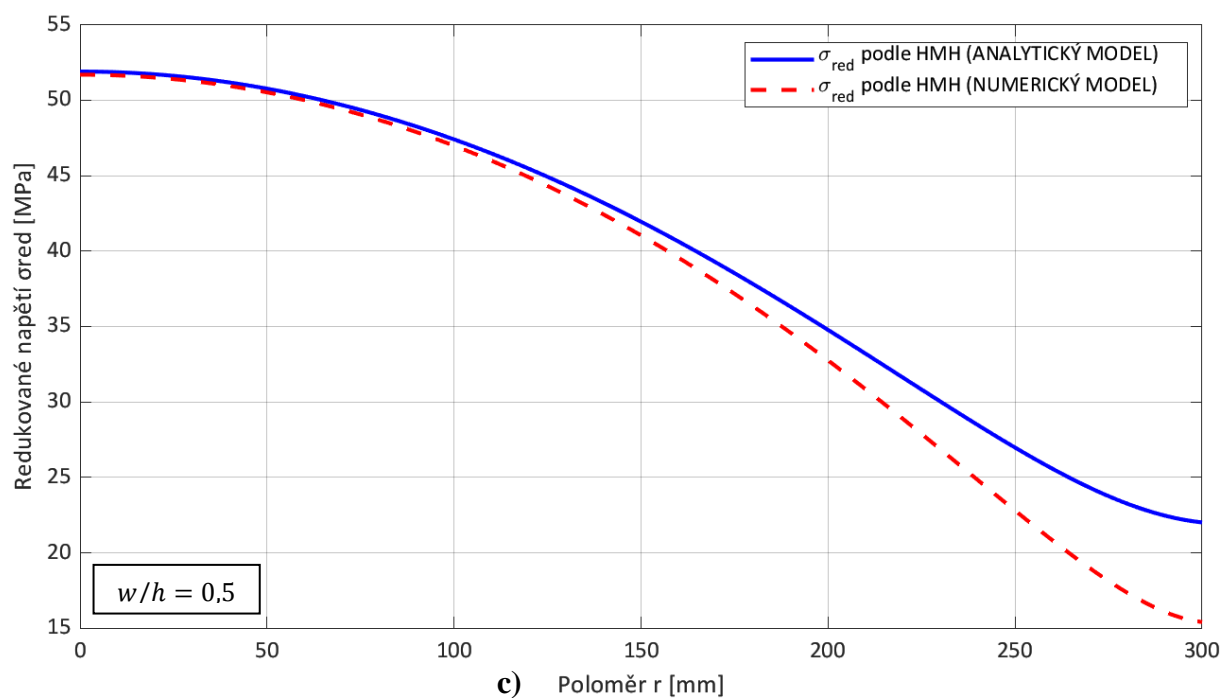
Závislosti průhybů na střednicové rovině (obr. 5.4) ukazují, že největší průhyb je ve středu desky a se vzrůstajícím poměrem  $w/h$  se rozdíl mezi řešeními zvyšuje tak, že numerický výsledek je vždy menší. To je způsobeno rozložením deformace na průhyb a posuv v rovině desky (obr. 5.5).



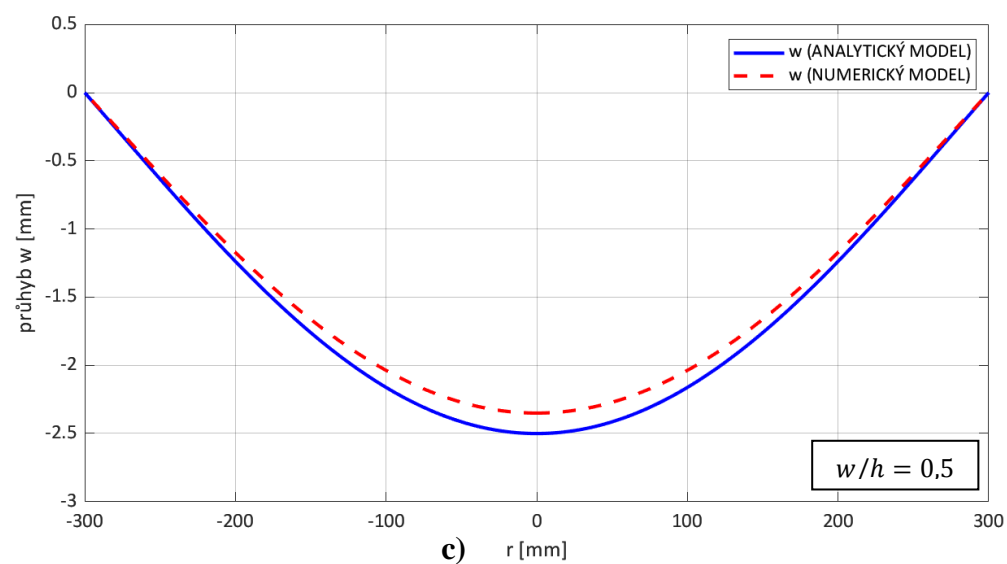
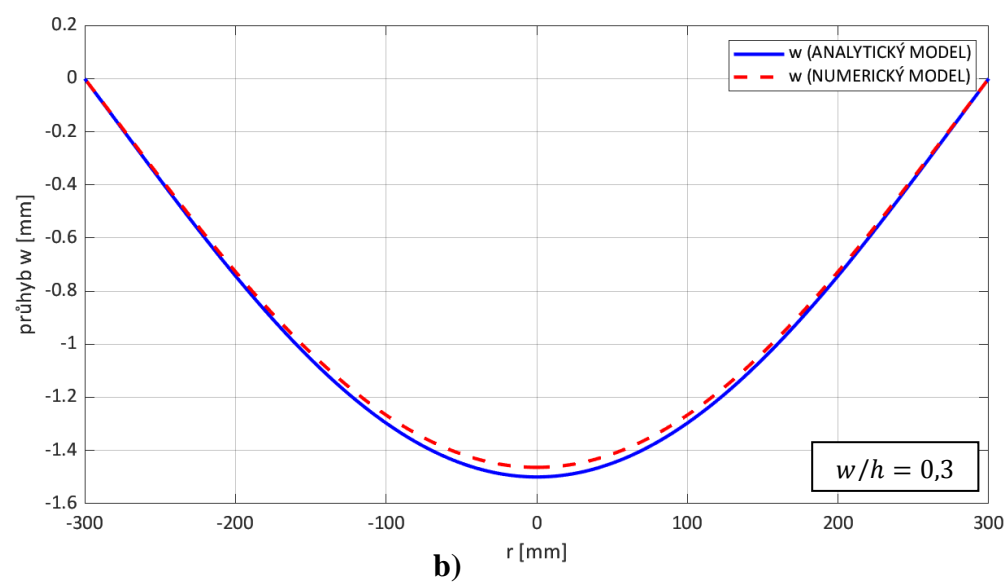
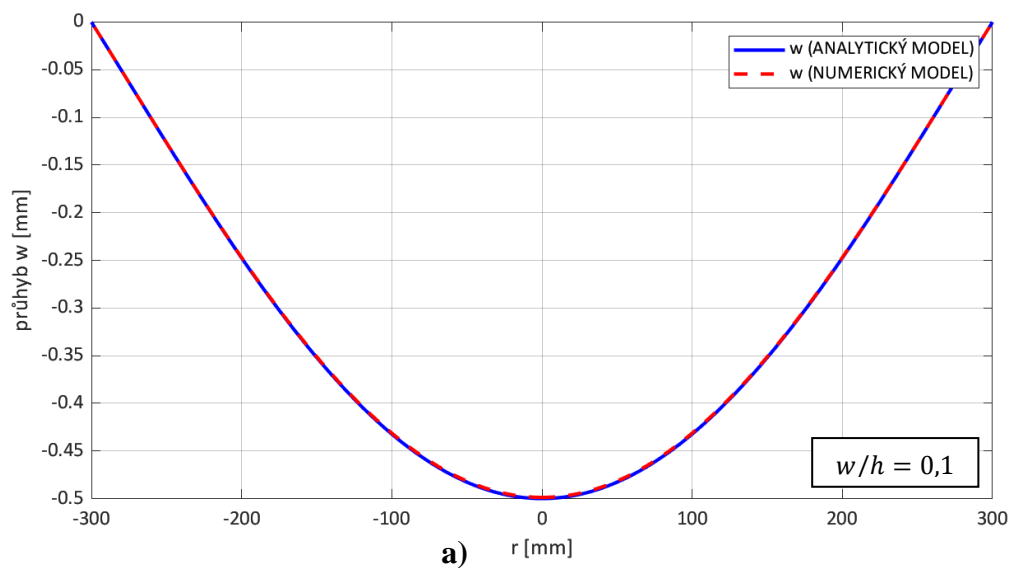


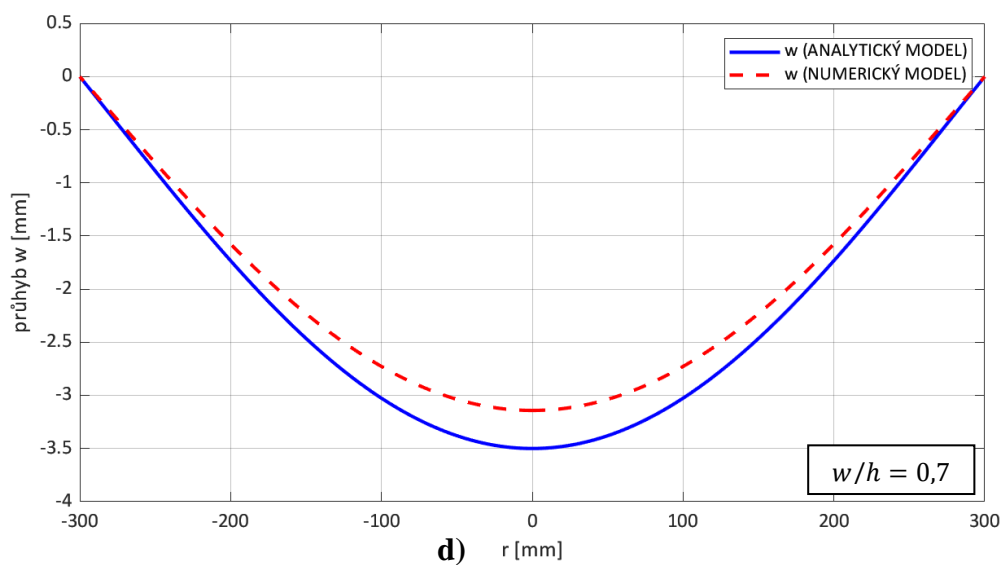
**Obr 5.2.:** Graf závislosti radiálního a obvodového napětí  $\sigma_r, \sigma_t$  na poloměru desky  $r$  na spodním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde poměr  $w/h$  je: **a)** 0,1; **b)** 0,3; **c)** 0,5; **d)** 0,7.



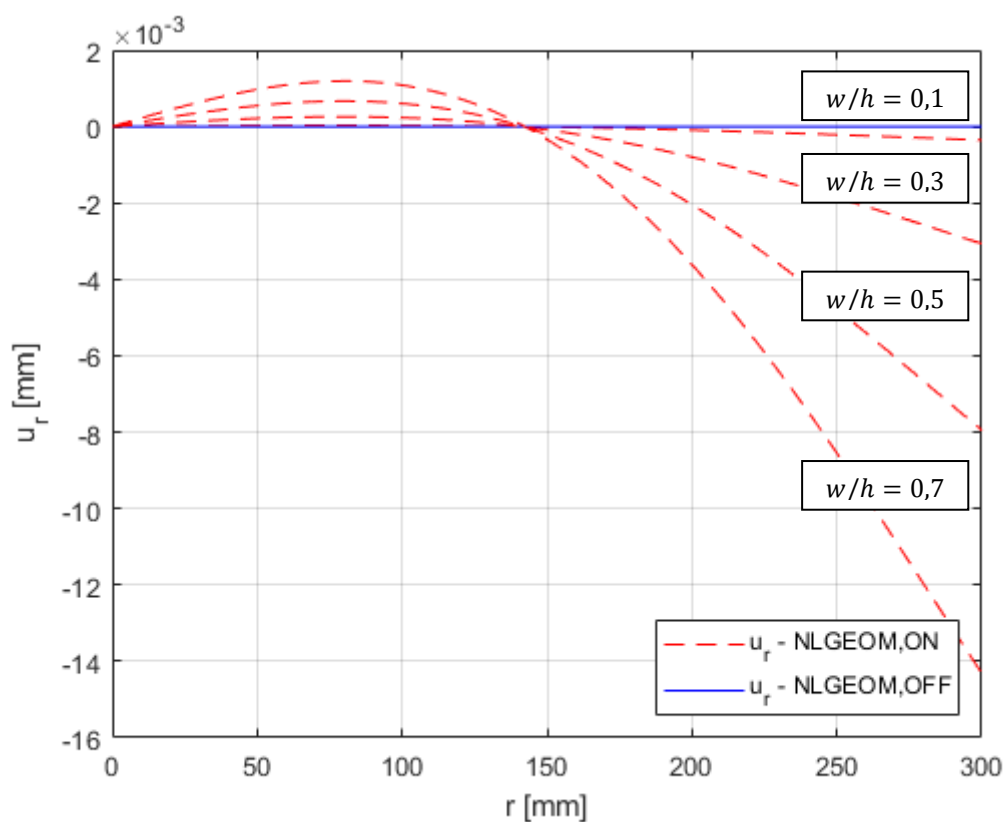


**Obr 5.3:** Graf závislosti redukovaného napětí  $\sigma_{red}$  podle HMM na poloměru desky  $r$  na spodním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde poměr  $w/h$  je: **a)** 0,1; **b)** 0,3; **c)** 0,5; **d)** 0,7.





**Obr 5.4:** Graf závislosti průhybu  $w$  na poloměru desky  $r$  v místě střednicové roviny pro analytické a numerické řešení, kde poměr  $w/h$  je: **a)** 0,1; **b)** 0,3; **c)** 0,5; **d)** 0,7.



**Obr. 5.5:** Graf závislosti radiálního posuvu  $u_r$  na poloměru  $r$  pro předpoklad velkých a malých deformací.

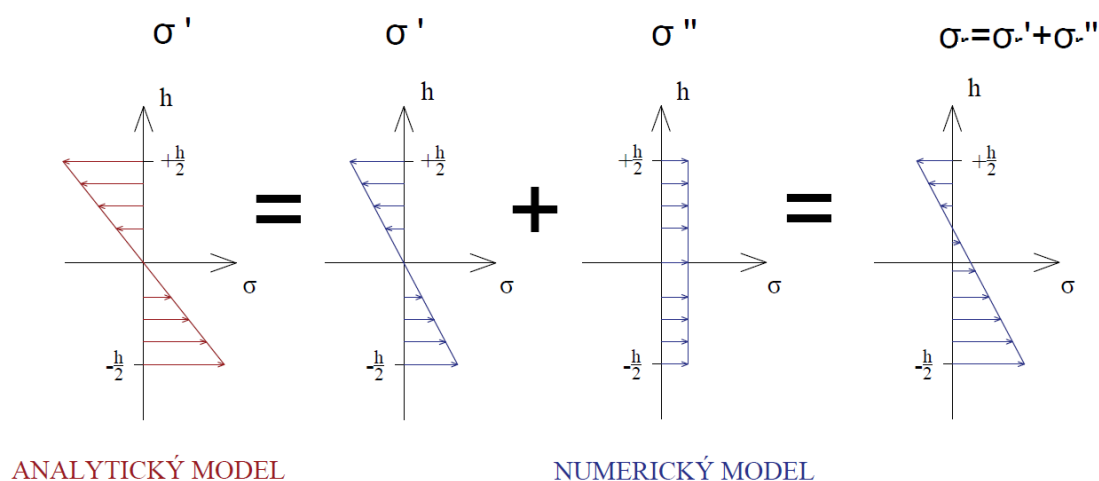
Analytické řešení  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  má vždy shodnou hodnotu na dolním i horním povrchu desky, pouze mají opačné znaménko. Tato vlastnost se však s narůstajícím průhybem vytrácí, jak lze vidět v tab. 5.2. Zde jsou zobrazeny maximální hodnoty napětí v kritickém místě desky ( $r = 0$ ). S narůstajícím poměrem  $w/h$  se rozdíly v napětí mezi horním a dolním povrchem zvyšují.

**Tab. 5.2:** Maximální hodnoty  $\sigma_r$ , resp.  $\sigma_t$  ve středu desky na dolním ( $h = -2,5 \text{ mm}$ ) a horním ( $h = 2,5 \text{ mm}$ ) povrchu pro analytické a numerické řešení.

		$w/h = 0,1$		$w/h = 0,3$		$w/h = 0,5$		$w/h = 0,7$		$w/h = 3$	
$r = 0 \text{ mm}$		NUM. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	ANAL. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	NUM. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	ANAL. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	NUM. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	ANAL. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	NUM. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	ANAL. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	NUM. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]	ANAL. $\sigma_r = \sigma_t$ [MPa]
$h$ [mm]	-2,5	10,5	10,4	31,6	31,1	51,7	51,9	69,9	72,7	186,8	311,3
$h$ [mm]	2,5	-10,2	-10,4	-28,7	-31,1	-44,1	-51,9	-56,5	-72,7	-100,3	-311,3

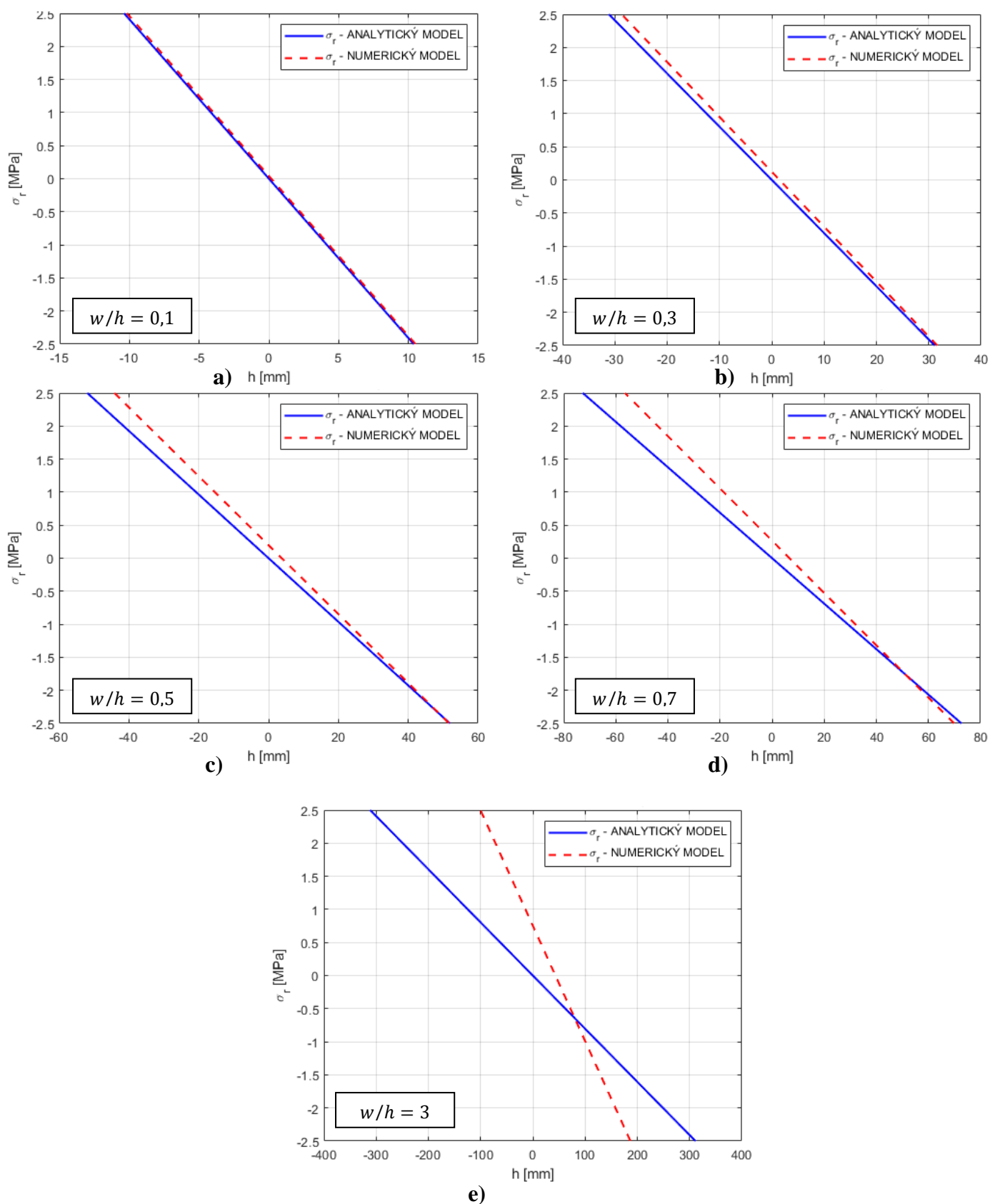
Lépe si průběh napětí lze ukázat na grafech závislosti napětí na tloušťce (obr. 5.7). S narůstajícím poměrem  $w/h$  se lineární závislosti pro numerický model posouvají více doprava od osy  $y$  a také se snižuje směrnice této funkce. Takový jev by se dal nejlépe vysvětlit grafickým znázorněním (obr. 5.6).

Průběh napětí u numerického modelu vychází z teorie nelineární geometrie, která byla dříve definována. U analytického modelu působí po tloušťce pouze ohybové napětí  $\sigma'$ , které se u numerického modelu rozloží na ohybové napětí  $\sigma'$  a konstantní membránové napětí  $\sigma''$  po tloušťce desky (typické pro stěnu). Čím vyšší poměr  $w/h$  bude, tím větší se vytvoří síly, působící v rovině desky, které způsobí zvětšení napětí  $\sigma''$  a zmenšení napětí  $\sigma'$ . Výsledný průběh je pak kombinací těchto napětí  $\sigma = \sigma' + \sigma''$  [13].



**Obr. 5.6:** Obecné znázornění průběhu napětí po tloušťce desky u analytického a numerického modelu využívajícího velké deformace.





**Obr. 5.7:** Graf závislosti radiálního napětí  $\sigma_r$  na výšce  $h$  v nejkritičtějších místech desky ( $r = 0$ ) pro analytické a numerické řešení, kde poměr  $w/h$  je: **a)** 0,1; **b)** 0,3; **c)** 0,5; **d)** 0,7; **e)** 3.

**Tab. 5.3:** Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na horním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.

$h = +2,5 \text{ mm}$ pro $\sigma$ , $h = 0 \text{ mm}$ pro $w$			Předpoklad velkých deformací			
$w$ [mm]	$w/h$ [-]	$w$ [mm]	$M_w$ [%]	$M_{\sigma r}$ [%]	$M_{\sigma t}$ [%]	$M_{\sigma red}$ [%]
0,2	0,04	0,9317	0,03	1,5	0,7	0,7
0,5	0,1	2,329	0,2	2,5	1,7	1,8
1	0,2	4,659	1,1	4,7	3,5	3,8
1,5	0,3	6,988	2,3	7,2	5,6	6,1
2	0,4	9,317	3,9	9,9	7,8	8,5
2,5	0,5	11,65	5,8	13,1	10,3	11,1
3	0,6	13,98	8,0	16,3	12,9	13,9
3,5	0,7	16,31	10,4	19,8	15,8	16,9

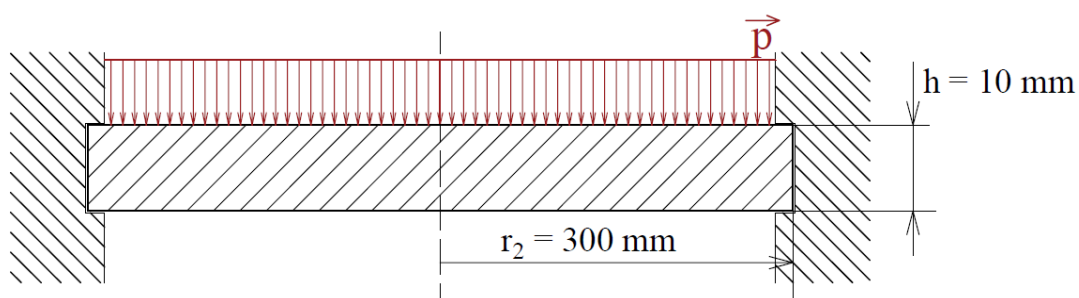
Je tedy zřejmé, že se napětí na površích u numerického modelu od sebe liší. Musí být tedy vyšetřovány obě strany zvlášť. V tab. 5.3 jsou znázorněny procentuální odchylky analytického a numerického modelu na horním povrchu desky. Zde lze vidět rychlejší nárůst procentuální chyby, než tomu bylo u dolního povrchu. U toho spodního totiž nedocházelo k velkým rozdílům v radiálním napětí, právě z důvodů kombinace napětí (obr. 5.6). Jelikož se zmenšovala směrnice funkce a zároveň se přímka posouvala doprava, radiální napětí analytického a numerického modelu se potkalo na spodním povrchu přibližně ve stejném bodě. Naopak na horním povrchu se rozdíl ještě více prohloubil.

Průměrné absolutní chyby 10% je dosaženo na horním povrchu dříve, a to již při  $w/h = 0,5$ . Kritičtějším povrchem je však ten spodní, kde je hodnota  $\sigma_{red}$  uprostřed desky vždy vyšší.

Další konfigurace již nebudou tak podrobně pospány, budou pouze shrnuty výsledky a rozdíly mezi modely. Veškeré grafy, které nejsou zobrazeny v textu, budou umístěny v příloze k bakalářské práci.

### 5.1.2 Analýza kruhové desky typu A2, zatížená tlakem

Druhým typem modelu, který bude řešen, je kruhová deska, vetknutá na okrajích a zatížená rovnoměrným tlakovým zatížením  $p$  po celé ploše (obr. 5.8). Deska je vyrobena z oceli a má větší tloušťku než deska v první analýze.



**Obr. 5.8:** Meridiánový řez deskou typu A2, zatíženou tlakem  $p$ .

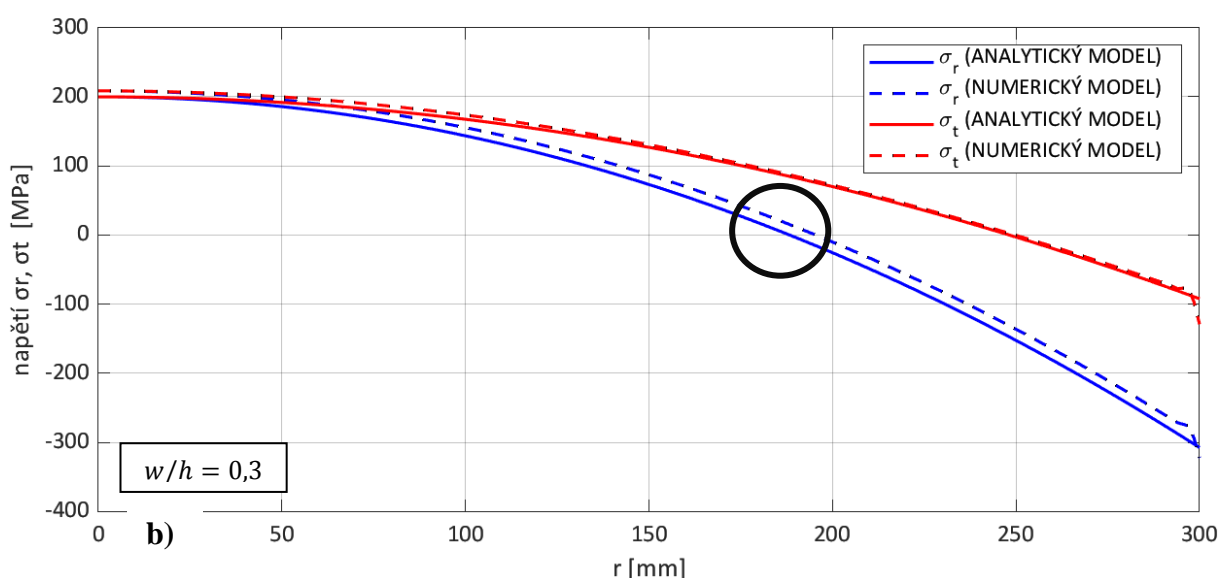
**Tab. 5.4:** Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na horním a spodním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.

			$h = 0 \text{ mm}$	Dolní povrch $h = -2,5 \text{ mm}$			Horní povrch $h = +2,5 \text{ mm}$		
$w$ [mm]	$w/h$ [-]	$p$ [MPa]	$M_w$ [%]	$M_{\sigma_r}$ [%]	$M_{\sigma_t}$ [%]	$M_{\sigma_{red}}$ [%]	$M_{\sigma_r}$ [%]	$M_{\sigma_t}$ [%]	$M_{\sigma_{red}}$ [%]
0,4	0,04	0,0608	0,7	6,2	1,3	1,1	14,7	1,6	1,4
1	0,1	0,1519	0,4	24,3	3,4	2,5	12,8	4,5	3,1
2	0,2	0,3039	1,2	21,6	8,3	4,6	32,7	11,6	6,3
3	0,3	0,4558	2,6	32,8	8,5	6,5	34,6	14,0	9,9
4	0,4	0,6078	6,2	96,2	22,2	8,1	48,8	19,6	14,4
5	0,5	0,7597	8,4	52,1	11,8	9,6	49,6	25,5	19,4
6	0,6	0,9117	10,9	81,4	16,3	11,4	96,0	32,0	25,3

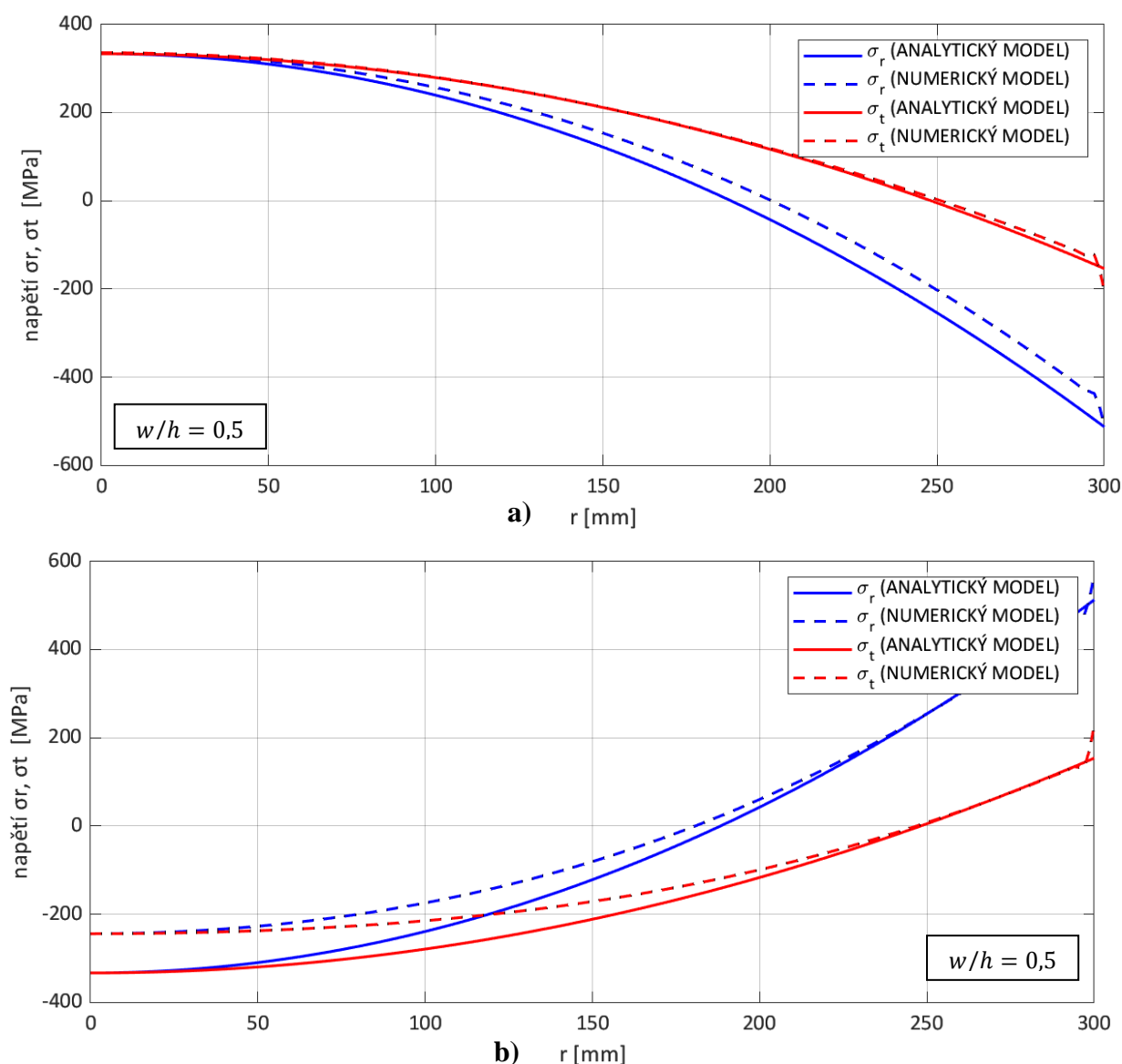
Rozdíly mezi analytickým a numerickým řešením budou rozebrány velmi podobně jako u předchozího modelu. Procentuální odchylky nad 10 % je dosaženo již při  $w/h = 0,04$  a to u radiálního napětí. To je způsobeno problémem statistické metody, která je v práci použita.

Na obr. 5.9 je vidět oblast v černém kruhu, kde se hodnoty radiálních napětí pohybují okolo 0. Pokud jsou spolu porovnávány velmi malé hodnoty, pak i malé číselné rozdíly vyvolají velké procentuální odchylky. Konkrétně zde je to 6 hodnot v černém kruhu, které se pohybují v rozmezí 50-150 % a to už způsobí značnou celkovou chybu.

Na obr. 5.10 je porovnání průběhů  $\sigma_r, \sigma_t$  pro spodní, resp. horní povrch, kdy  $w/h = 0,5$ . Dokud jsou hodnoty napětí kladné, grafy mají podobný průběh, jako v první analýze, numerické a analytické řešení se od sebe s narůstajícím poloměrem oddaluje, resp. přibližuje. V záporné části se toto chování obrátí. Je to způsobeno rozložením napětí po tloušťce, kdy na rozdíl od obr. 5.6 a 5.7 je funkce této závislosti rostoucí. Vlivem membránového napětí se závislosti potkají ve skoro stejném místě, tentokrát však na horním povrchu.



**Obr. 5.9:** Graf závislosti radiálního a obvodového napětí  $\sigma_r, \sigma_t$  na poloměru desky  $r$  na spodním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde  $w/h = 0,3$ .

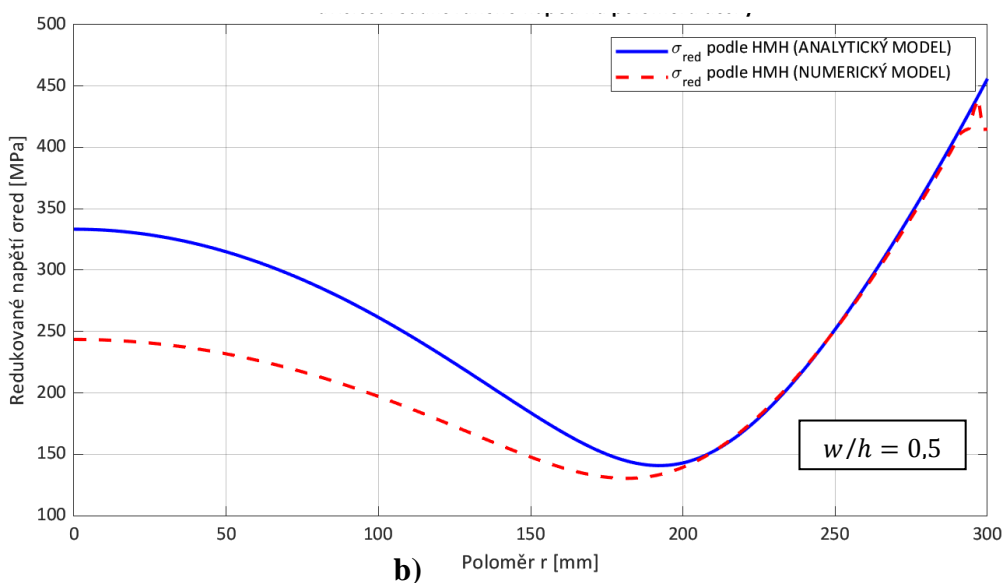
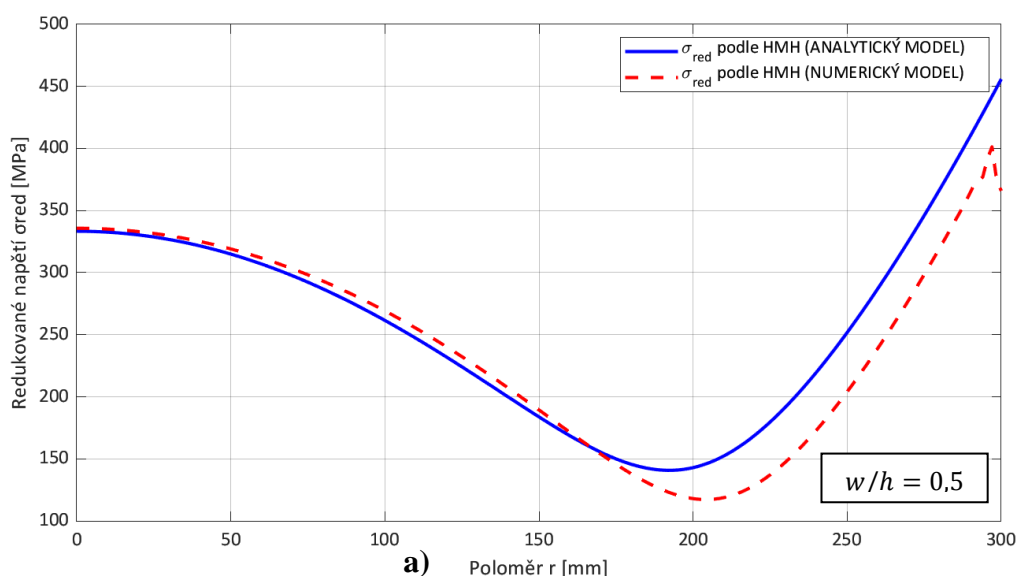


**Obr. 5.10:** Graf závislosti radiálního a obvodového napětí  $\sigma_r, \sigma_t$  na poloměru desky  $r$  pro analytické a numerické řešení, kde  $w/h = 0,5$  pro povrch **a)** spodní, **b)** horní.

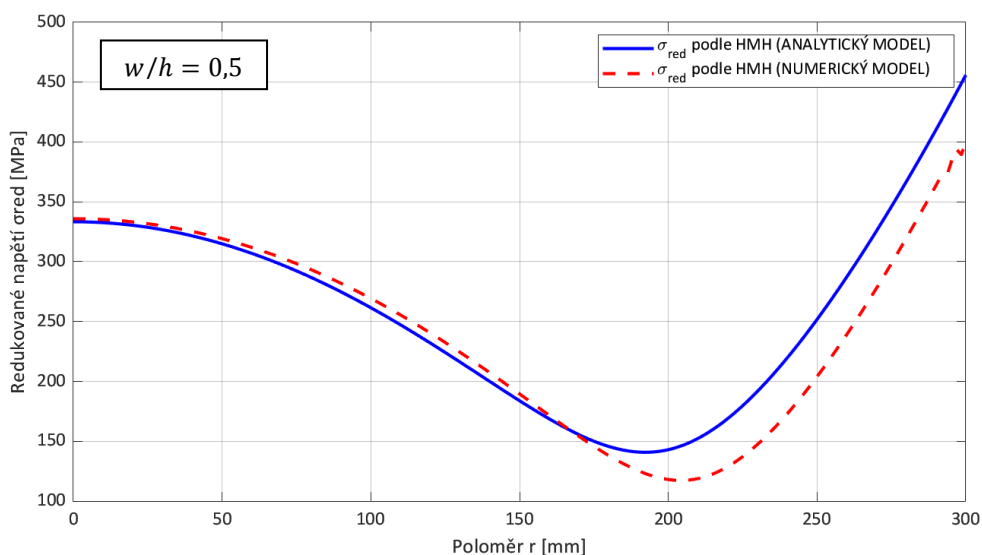
Na obr. 5.11 jsou dále zobrazeny závislosti redukovaných napětí na horním a dolním povrchu desky. Zde je vidět, že nebezpečné místo je na okraji desky ( $r = 300$  mm). Přibližování a oddalování průběhů napětí mezi analytickým a numerickým řešením, vysvětlené v předchozím odstavci, je zde ještě lépe viditelné, než tomu bylo na obr. 5.10. Na spodním povrchu (obr. 5.11a) je v prvních dvou třetinách desky podobné řešení v obou modelech. V poslední třetině lze vyzorovat rozdíly v redukovaném napětí mezi analytickým a numerickým řešením. Na horním povrchu (obr. 5.11b) je tomu naopak, a jelikož je zde velmi podobné řešení pouze v poslední třetině desky, celkové procentuální odchylky u redukovaného napětí (tab. 5.4) jsou v místě  $h = 2,5$  mm větší než v místě  $h = -2,5$  mm. Pokud by se bralo v potaz pouze okolí kritického místa ( $r = 300$  mm), pak by byly výsledky přesnější u horního povrchu a to i při větších průhybech.

V místě vetknutí je znatelná odchylka mezi analyticky a numericky spočítaným napětím. Důvod je takový, že vazba v SW ANSYS je realizována tak, že zamezuje všem posuvům po

celé tloušťce, což zde vyvolává dodatečné napětí. Pokud bude uložení nahrazeno tak, že všem uzlům po tloušťce desky bude zamezeno posuvům v radiálním směru a v jednom uzlu (např. spodním) bude zamezeno axiálnímu posuvu, pak bude odchylka odstraněna (obr. 5.12).



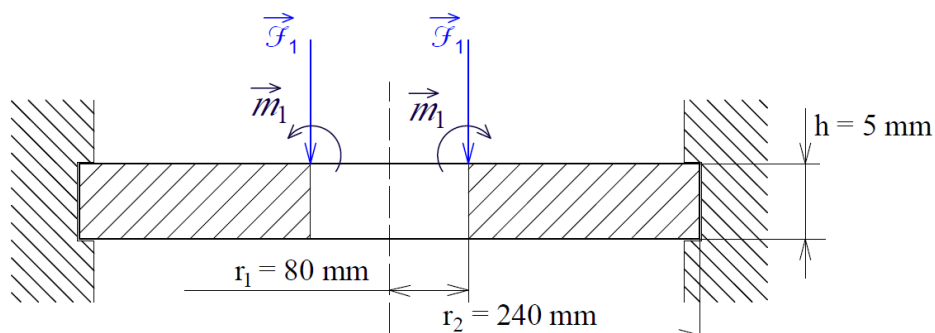
**Obr. 5.11:** Graf závislosti redukovaného napětí  $\sigma_{red}$  podle HMH na poloměru desky  $r$  pro analytické a numerické řešení, kde  $w/h = 0,5$  pro povrch a) spodní, b) horní.



**Obr. 5.12:** Graf závislosti redukovaného napětí  $\sigma_{red}$  podle HMH na poloměru desky  $r$ , na dolní rovině pro analytické a numerické řešení, kde  $w/h = 0,5$ , s upravenou vazbou vetknutí.

### 5.1.3 Analýza mezikruhové desky typu A4, zatížená radiálním momentem a liniovou silou

Posledním typem desky, který bude v rámci zvyšování poměru  $w/h$  vyšetřován, je mezikruhová deska, vetknutá na vnějším okraji a zatížená radiálním momentem a liniovou silou na okraji vnitřním (obr. 5.13). Zároveň je poměr sil  $F_1/M_1$  zvolen tak, aby na vnitřním okraji byl úhel natočení  $\vartheta$  nulový a největší průhyb vznikl právě na tomto okraji.



**Obr. 5.13:** Meridiánový řez deskou typu A4, zatíženou liniovou silou  $F_1$  a radiálním momentem  $m_1$ .

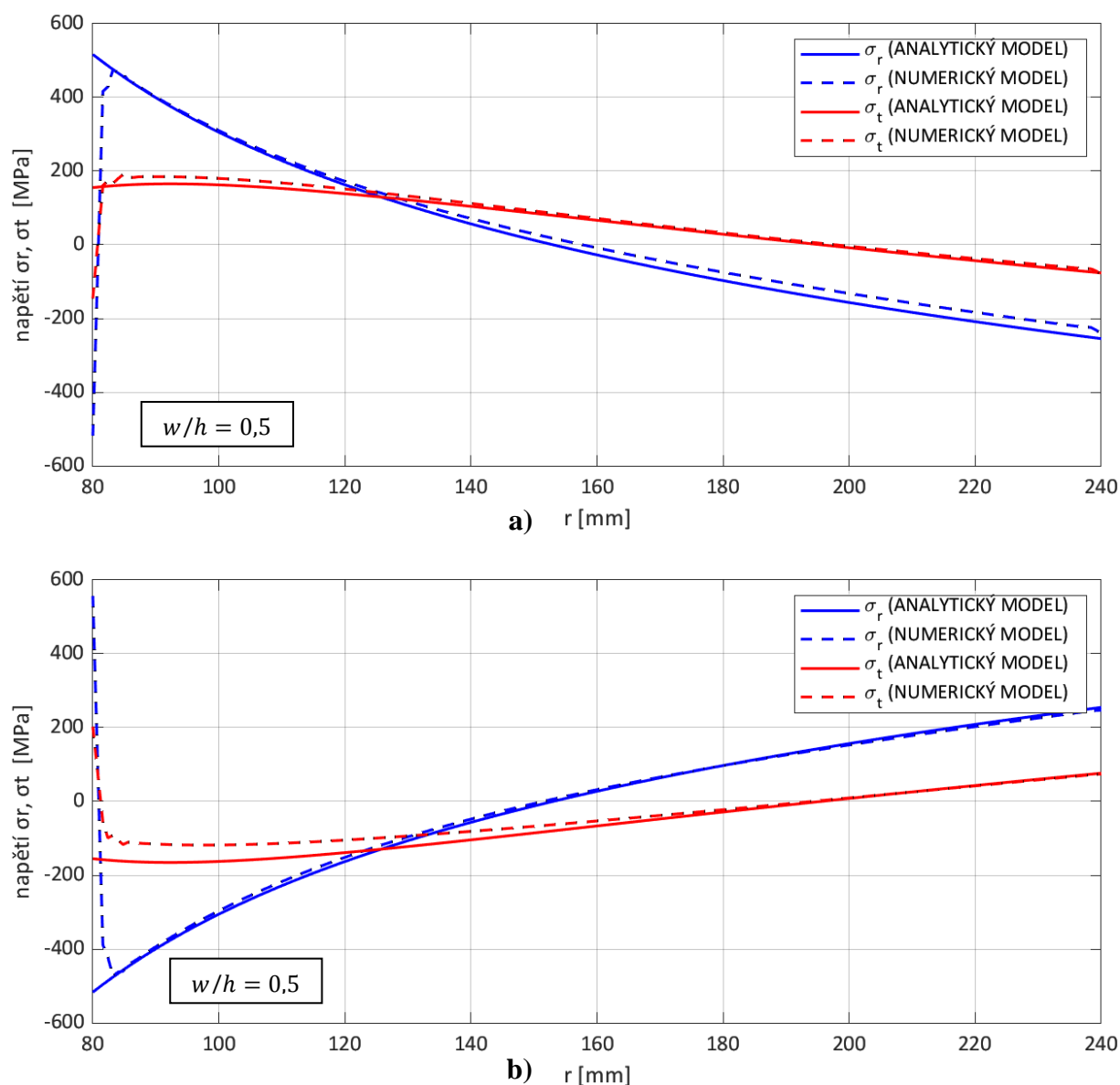
**Tab. 5.5:** Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na horním a spodním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.

				$h = 0 \text{ mm}$	Dolní povrch $h = -2,5 \text{ mm}$			Horní povrch $h = +2,5 \text{ mm}$		
$w$ [mm]	$w/h$ [-]	$F_1$ [kN]	$M_1$ [N·m]	$M_w$ [%]	$M_{\sigma r}$ [%]	$M_{\sigma t}$ [%]	$M_{\sigma red}$ [%]	$M_{\sigma r}$ [%]	$M_{\sigma t}$ [%]	$M_{\sigma red}$ [%]
0,2	0,04	1,47	86,5	0,4	3,5	3,2	1,0	2,8	3,5	1,1
0,5	0,1	3,68	216,3	0,2	6,2	5,3	2,0	6,0	6,1	1,9
1	0,2	7,35	432,6	1,1	11,8	10,7	3,8	8,1	12,5	3,1
1,5	0,3	11,03	648,9	2,0	15,2	13,0	5,5	11,2	16,8	4,4
2	0,4	14,7	865,2	3,5	18,1	15,2	7,2	12,9	21,7	5,6
2,5	0,5	18,38	1081,6	8,0	26,1	17,5	10,6	11,6	28,1	9,0

V tabulce lze vidět, že analýza je prováděna pouze do hodnoty  $w/h = 0,5$ . Redukované napětí  $\sigma_{red}$  již při této hodnotě přesáhne mez kluzu  $\sigma_K$  a dostane se do plastické oblasti tahového diagramu, kde již nemůže platit lineární závislost mezi napětím a přetvořením. Pro tuto analýzu jsou však tabulkové hodnoty dostačující.

Průměrné procentuální odchylky jsou chováním velmi podobné předchozí analýze. Prudší nárůst průměrných chyb lze zaznamenat u  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$ . Zase je to způsobeno problémem statistické metody, stejně jako u předchozího modelu. Na dolním povrchu je menší odchylka  $M_{\sigma t}$ , naopak na horním povrchu je menší  $M_{\sigma r}$ . Důvodem je obdobně jako u všech provedených analýz závislost napětí na tloušťce desky.

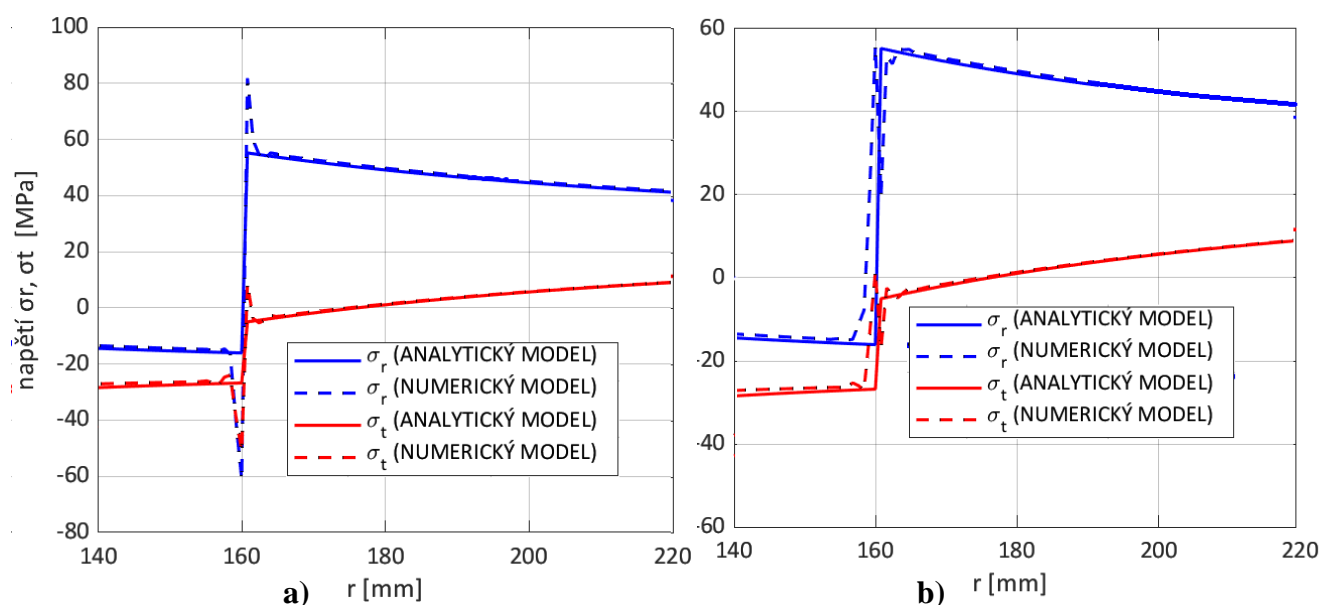
Vliv radiálního momentu a liniové síly na napětí je však zajímavější. Na obr. 5.14 si lze povšimnout velkých vychýlení v místě vnitřního okraje desky. To je způsobeno skokovou změnou momentů v tomto místě a zvolenou diskretizací v SW ANSYS.



**Obr. 5.14:** Graf závislosti radiálního a obvodového napětí  $\sigma_r, \sigma_t$  na poloměru desky  $r$  pro analytické a numerické řešení, kde  $w/h = 0,5$ , pro povrch **a)** spodní, **b)** horní.

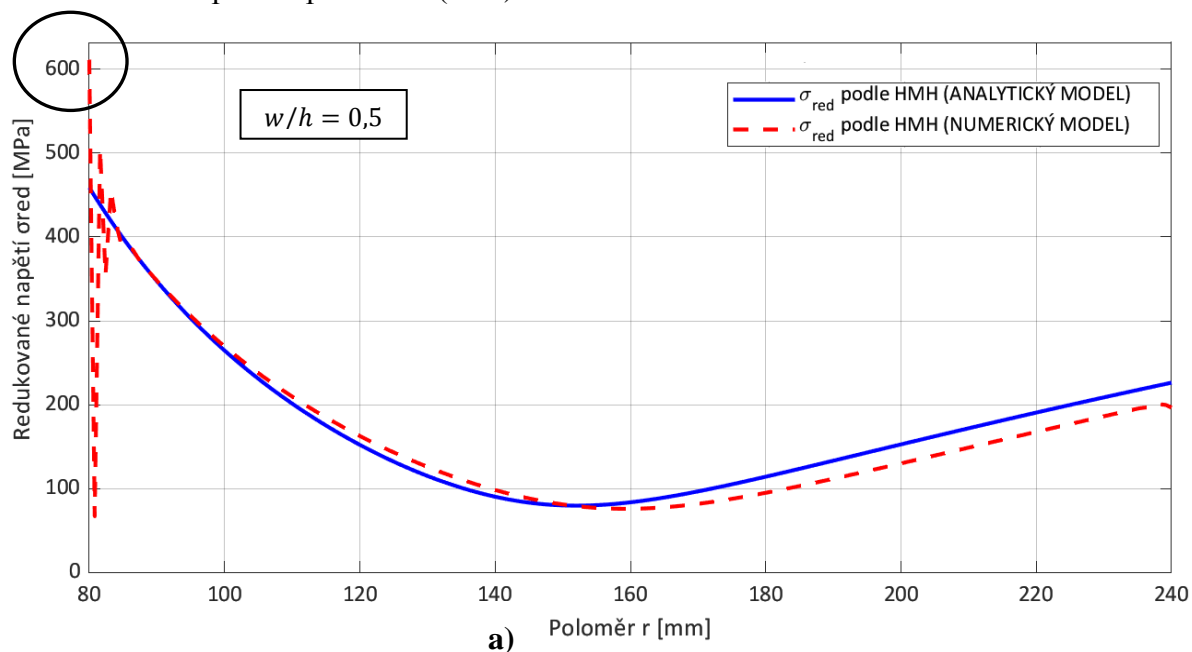
Skoková změna je lépe vidět na případě, kdy radiální moment dáme do libovolného místa desky mimo její okraje (obr. 5.15a). Zatížení momentem nelze realizovat v SW ANSYS pro prvek PLANE183, jelikož jeho uzly nemají rotační stupeň volnosti. Proto je v místě působícího momentu vytvořen pomocný element typu MPC184, který je svázaný s původní sítí a na který lze již moment aplikovat. Pokud je element vytvořen po celé tloušťce, pak průběh napětí doprovází „špička“ napětí. Ta je způsobena reakční dvojicí sil od momentu, které působí na površích desky. Tyto síly totiž působí v místě jednoho uzlu na obou površích, což v praxi není realizovatelné a způsobí to numerickou chybu. Pokud bude element aplikován pouze na část tloušťky (vždy jeden prvek od povrchů), pak tyto „špičky“ zmizí (5.15b), ale funkce numerického řešení nebude v místě momentu tak dobře kopírovat funkci

analytického řešení. V této analýze a ve vytvořeném výpočetním programu je využit druhý způsob aplikace momentu.

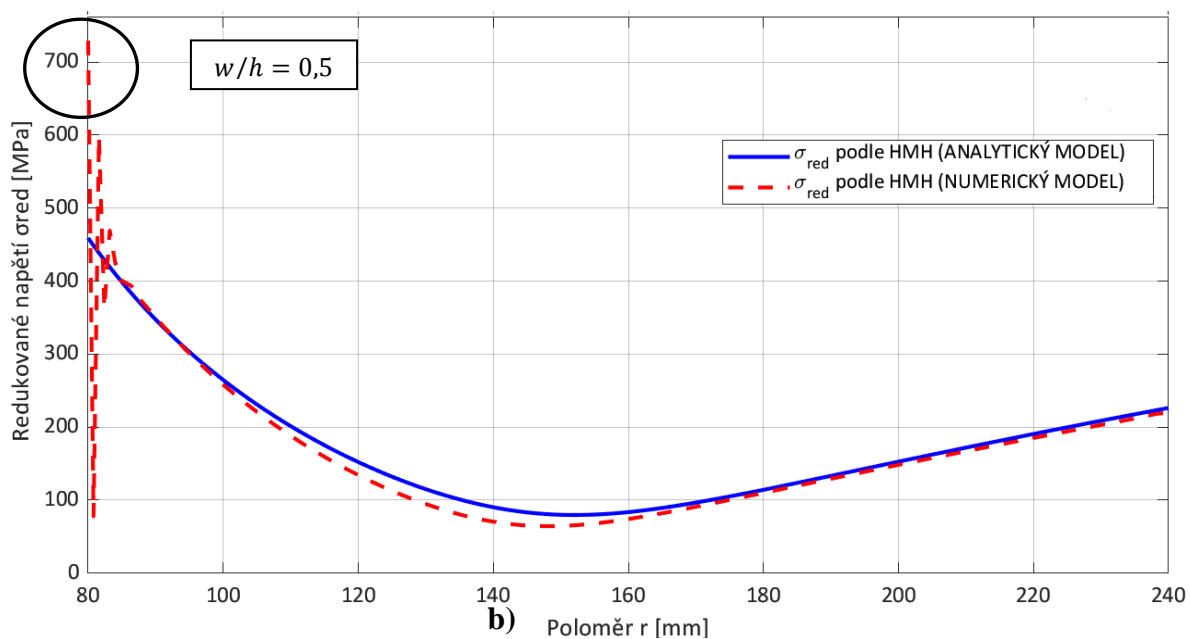


**Obr. 5.15:** Graf závislosti radiálního a obvodového napětí  $\sigma_r, \sigma_t$  na poloměru desky  $r$  pro analytické a numerické řešení, kdy je moment aplikován **a)** po celé tloušťce, **b)** na části tloušťky.

Liniová síla způsobí větší procentuální vychýlení na horním povrchu desky, jelikož je aplikována na samostatný uzel právě na tomto povrchu, což je dobře vidět na závislostech redukovaného napětí na poloměru (5.16).







**Obr. 5.16:** Graf závislosti redukovaného napětí  $\sigma_{red}$  podle HMH na poloměru desky  $r$  pro analytické a numerické řešení, kde  $w/h = 0,5$  pro povrch **a)** spodní, **b)** horní.

Vazba vetknutí je upravena způsobem, popsáním v předchozí analýze, na vnějším okraji tedy nejsou zaznamenány žádné výrazné odchylky.

## 5.2 Vliv tloušťky desky na přesnost analytického modelu

Druhá analýza bude prováděna v závislosti na podílu  $2r/h$ , kdy bude zvětšována tloušťka desky  $h$  při konstantním poloměru  $r$ . Porovnání analytického a numerického modelu bude tentokrát řešeno pouze pro jednu konfiguraci.

### 5.2.1 Analýza kruhové desky typu A1, zatížená tlakem

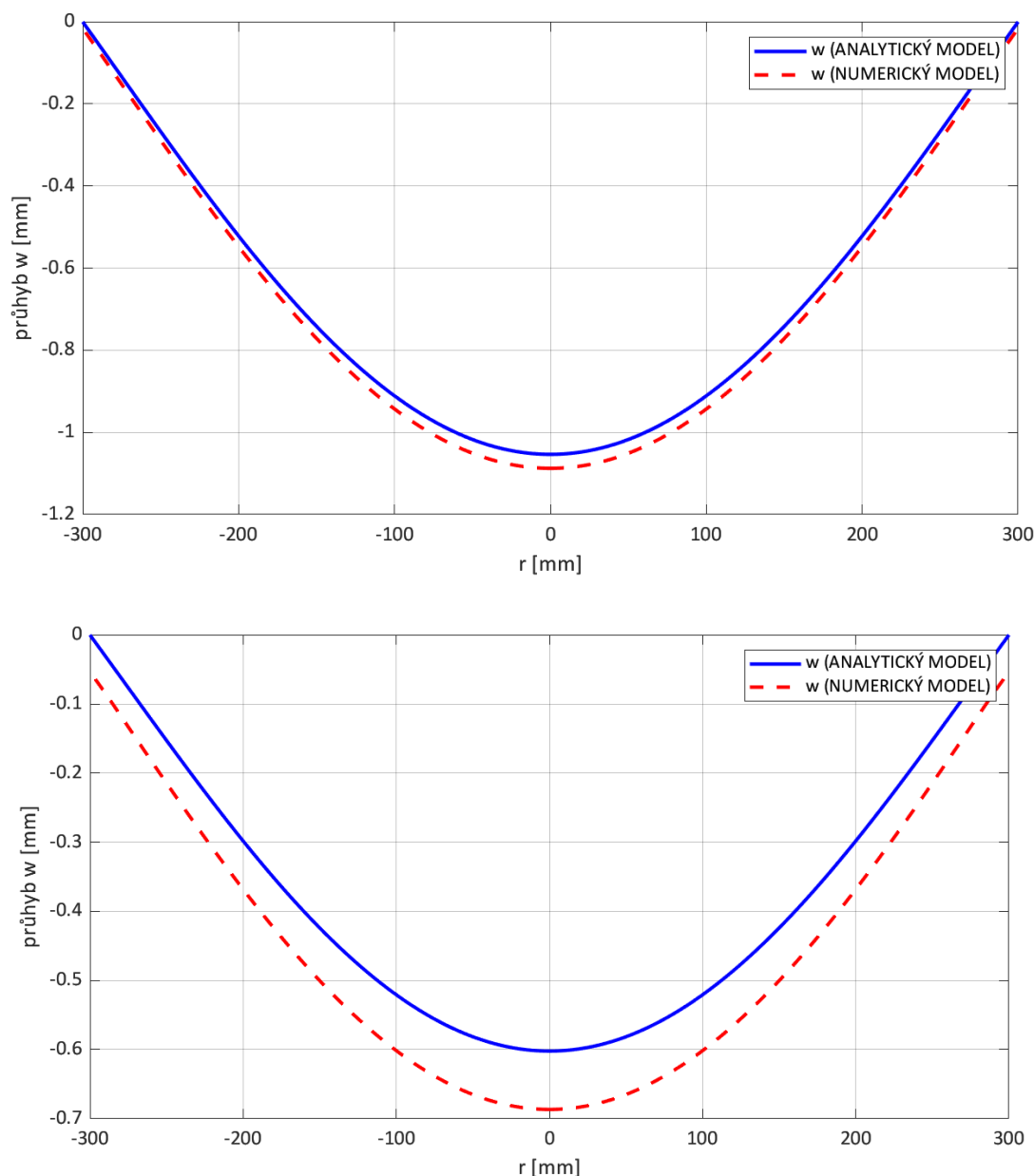
Analýza bude řešena na stejném typu desky jako v podkapitole 5.1.1 (obr. 5.1). Nejdříve bude zvětšována tloušťka tak, aby působící tlakové napětí vyvolalo stejnou bezpečnost u všech desek ( $k_K = 2$ ), hodnoty napětí tedy budou stejné pro všechny konfigurace desky. Poté bude zvyšována tloušťka tak, aby poměr  $w/h$  byl 0,05. Oba tyto přístupy mají však svoje negativa, která budou shrnuta po provedení analýzy.

**Tab. 5.6:** Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na spodním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.

$k_K = 2, r_2 = 300 \text{ mm}$				$H = 0$	Dolní povrch $H = -h/2$		
$h$ [mm]	$2r/h$	$p$ [MPa]	$w$ [mm]	$M_w$ [%]	$M_{\sigma r}$ [%]	$M_{\sigma t}$ [%]	$M_{\sigma \text{red}}$ [%]
5	120	0,03928	8,6	37,1	15,9	58,7	49,0
10	60	0,1571	4,3	4,5	4,2	7,4	6,2
20	30	0,6285	2,1	1,4	4,6	1,9	2,0
40	15	2,514	1,1	6,6	7,0	2,9	2,1
60	10	5,657	0,7	15,8	10,3	4,3	4,6
70	8,57	7,699	0,6	21,5	12,1	5,4	6,1
100	6	15,71	0,4	40,5	17,7	9,5	11,2

V první tabulce (tab. 5.6) lze vidět, jak se průměrné procentuální odchylky mění v závislosti na tloušťce, pokud bude dosaženo bezpečnosti k MSP podle HMH  $k_K = 2$ . To však znamená, že při tloušťce  $h = 5$  a  $h = 10$  bude maximální hodnota průhybu  $w$  větší než  $0,3h$ . Z předchozí analýzy plyne, že pokud průhyb překročí tuto hodnotu tloušťky, začne chyba analytického modelu výrazně narůstat. Proto první dva řádky tabulky budou z řešení vyloučeny.

Nejmenší odchylku průhybu má model desky, pro který platí  $2r/h = 30$  a s rostoucí tloušťkou se průměrná procentuální chyba zvyšuje. Na grafech závislosti průhybu na poloměru (obr. 5.17) lze tuhle rostoucí odchylku vyzorovat. U předchozích analýz, kde byl zvětšován průhyb, se chyba postupně zvětšovala tak, že maximální průhyb u numerického modelu byl vždy menší než u analytického. U této analýzy je to přesně naopak, numerický model má větší maximální průhyb než analytický. Jedním z důvodů, proč by tomu tak mohlo být, je zanedbání úhlového přetvoření  $\gamma_{zr}$  v analytickém řešení, které způsobuje borcení řezů desky. Dalším důvodem je fakt, že u tlustostěnných desek se výrazněji mění závislost průhybu na tloušťce. Veškeré zatížení a vazby působí v analytickém modelu na střednicové rovině, u numerického modelu (a i v praxi) působí zatížení na horní povrch desky a zamezení posuvu v axiálním směru na vnějším okraji je realizováno na dolním povrchu. U tenkostěnných desek tento fakt nijak výrazně neovlivňuje řešení, u desek s větším poměrem  $2r/h$  je to však rozhodující faktor. Proto můžeme vidět na obr. 5.17b, že průhyb na vnějším okraji u numerického modelu nezačíná na nule. Nulová hodnota je pouze v místě dolního povrchu, na střednicové rovině k malé deformaci v axiálním směru však dojde.



**Obr. 5.17:** Graf závislosti průhybu  $w$  na poloměru desky  $r$  v místě střednicové roviny pro analytické a numerické řešení, kde poměr  $2r/h$  je: **a)** 15; **b)** 8,57.

Existují teoreticky odvozené vztahy, které zpřesňují analytický výsledek průhybu tím, že zahrnují tloušťku desky  $h$ . Prvním z nich je Midlinova teorie desek, která bere v potaz možné úhlové přetvoření. Pro náš konkrétní případ je průhybová rovnice dána vztahem [17]:

$$w(r) = \frac{p}{64B} (r_2^2 - r^2) \left( \frac{5 + \mu}{1 + \mu} r_2^2 - r^2 + \frac{8}{5} \frac{8 + \mu + \mu^2}{1 - \mu^2} h^2 \right). \quad (5.2)$$

Druhým vztahem je rovnice, kterou vytvořil C. A. Clemmow a vypadá následovně [16]:

$$w(r) = \frac{pr_2^4}{64B} \left( 1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) \left[ 3 - \frac{r^2}{r_2^2} + \frac{8}{\mu(1 - \mu)} \frac{h^2}{r_2^2} \right]. \quad (5.3)$$

Oba tyto vztahy byly aplikovány do výpočetního programu a výsledky byly porovnány s klasickým analytickým řešením (tab. 5.7) pro desku s parametry  $r_2 = 300 \text{ mm}$ ,  $h = 70 \text{ mm}$ ,  $k_K = 2$ .

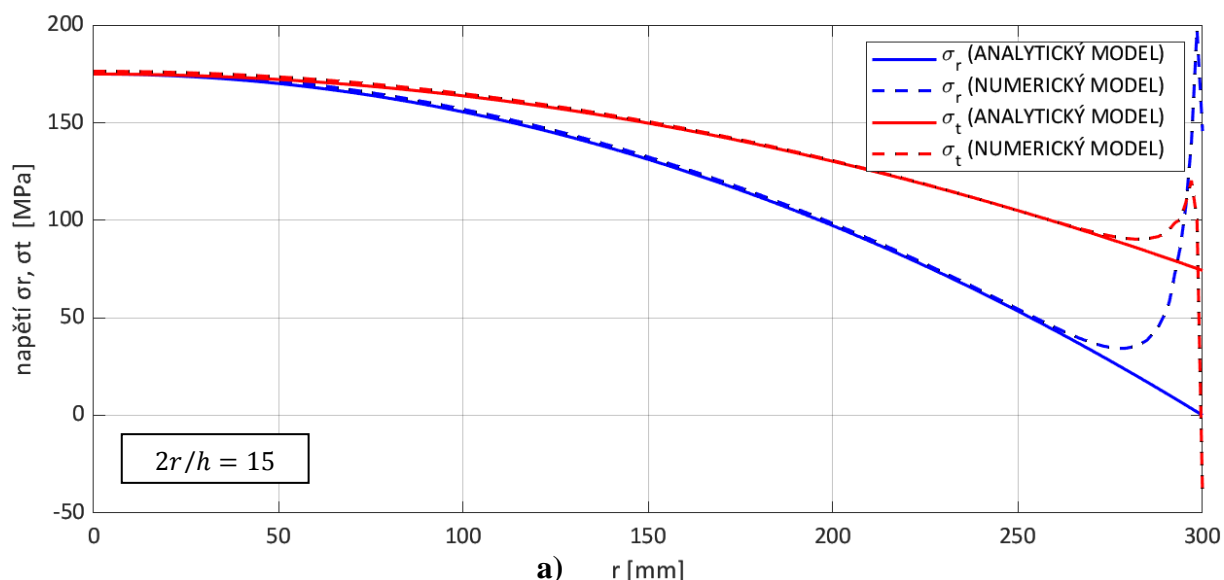
**Tab. 5.7:** Maximální průhyb analytického řešení, rozdíl mezi numerickým a analytickým  $w_{max}$ , průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu analytického řešení od numerického na spodním povrchu.

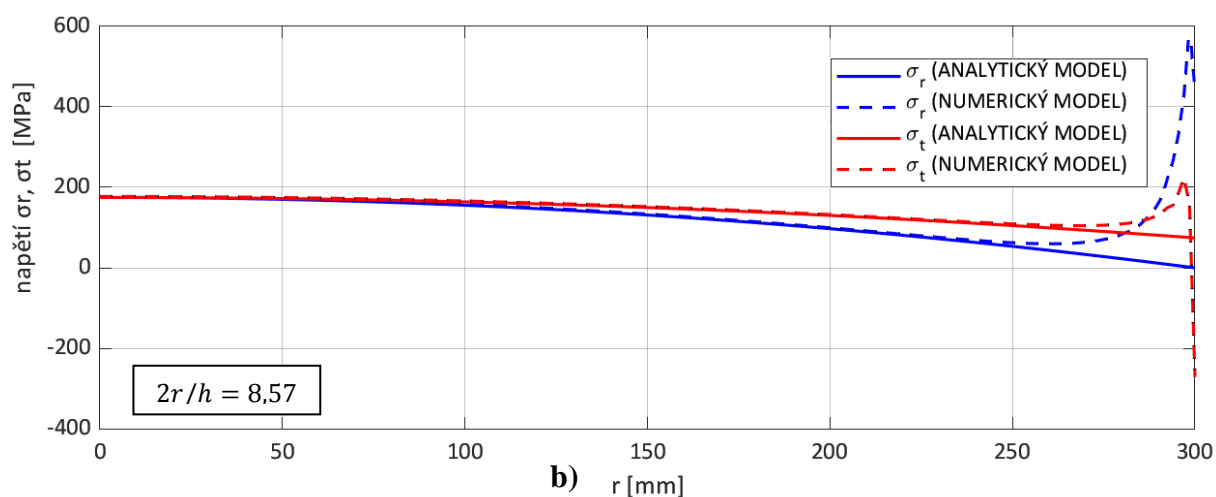
	$w_{maxANAL}$ [mm]	$w_{maxNUM} - w_{maxANAL}$ [mm]	$M_w$ [%]
Rovnice podle PPII	0,602	0,085	21,5
Rovnice podle Midlina	0,721	-0,034	9,4
Rovnice podle Clemmowa	0,75	-0,063	11,3

Nejmenší odchylky analytického řešení od numerického bylo dosaženo použitím rovnice podle Midlina.

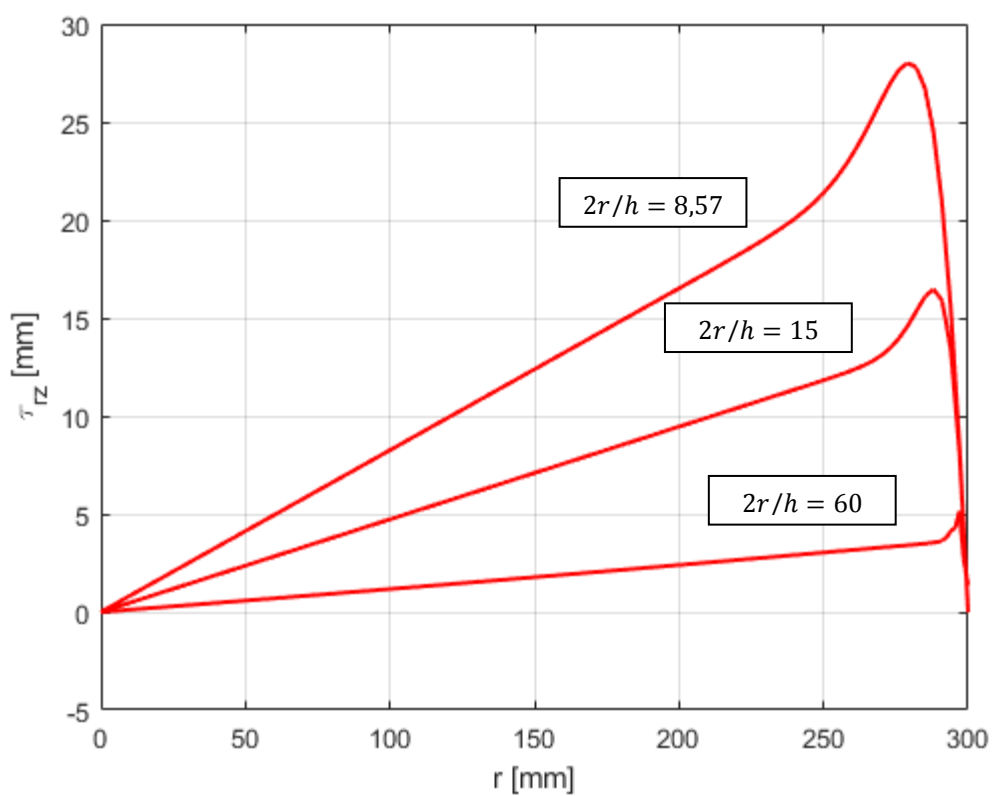
Průběh radiálního a obvodového napětí v závislosti na poloměru na dolním povrchu je zaznamenán na obr. 5.18. Do určité vzdálenosti od středu opisují závislosti napětí analytického a numerického modelu stejné funkce. Při přibližování se okraji desky, funkce obou napětí u numerického modelu začnou mít exponenciální průběh. To může být způsobeno vlivem podpory na okraji desky, která je realizována pouze na jednom uzlu. To v praxi není realizovatelné, proto reakční síla od této vazby může způsobit výraznější odchylku napětí numerického modelu od analytického. Navíc, jak již bylo zmíněno předtím, vazba je aplikována na dolní povrch, zatímco analytický model má vazbu uloženou na střednicové rovině.

Dalším důležitým faktorem u tlustostěnných desek, který analytický model nebere v úvahu, je smykové napětí  $\tau_{zr}$ , které je při vyšším poměru  $2r/h$  nezanedbatelně velké vůči ohybovým napětím  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  [13]. Toto napětí se ve výsledku promítne do průběhu redukovaného napětí. Na obr. 5.19 lze vidět, jak roste závislost smykového napětí  $\tau_{zr}$  na poloměru při zvětšující se tloušťce desky.





**Obr. 5.18:** Graf závislosti radiálního a obvodového napětí  $\sigma_r, \sigma_t$  na poloměru desky  $r$  na spodním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde poměr  $2r/h$  je: **a)** 15; **b)** 8,57.

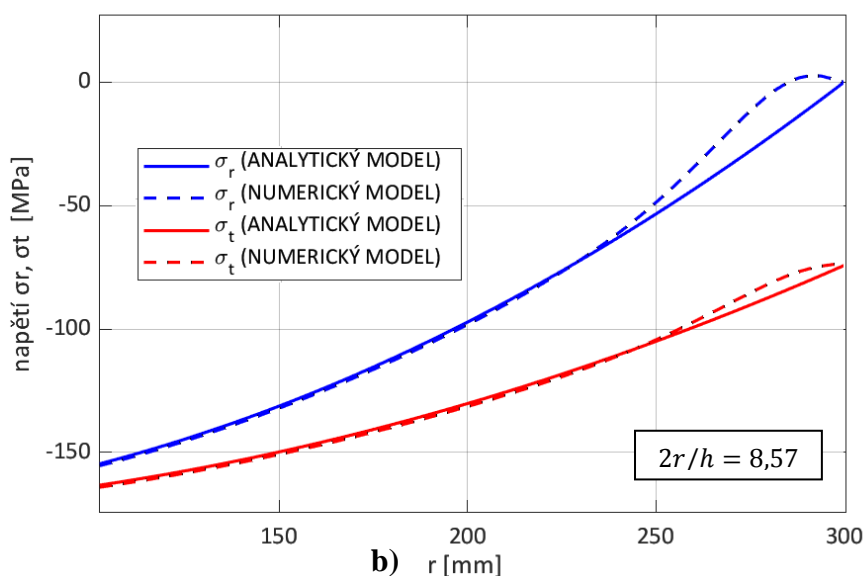
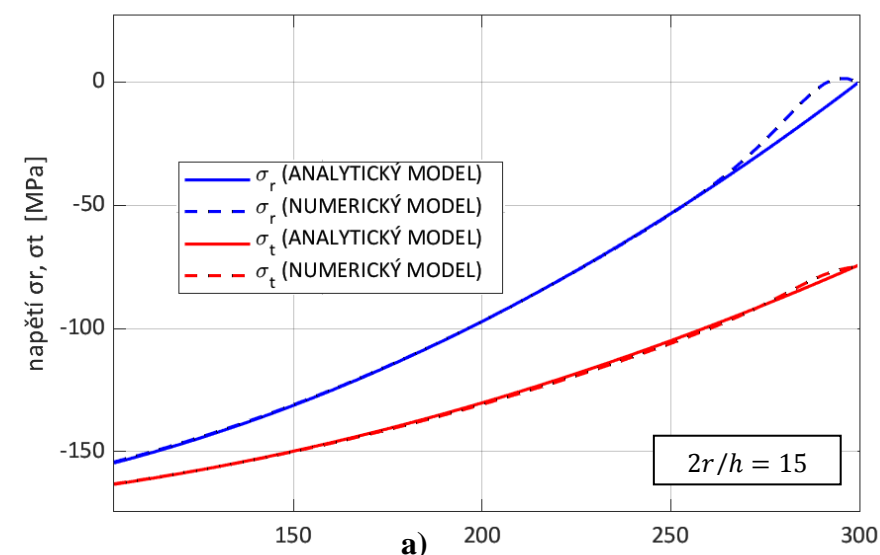


**Obr. 5.19:** Graf závislosti smykového napětí  $\tau_{rz}$  na poloměru desky  $r$ .

**Tab. 5.8:** Průměrná absolutní procentuální odchylka napětí analytického řešení od numerického na horním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.

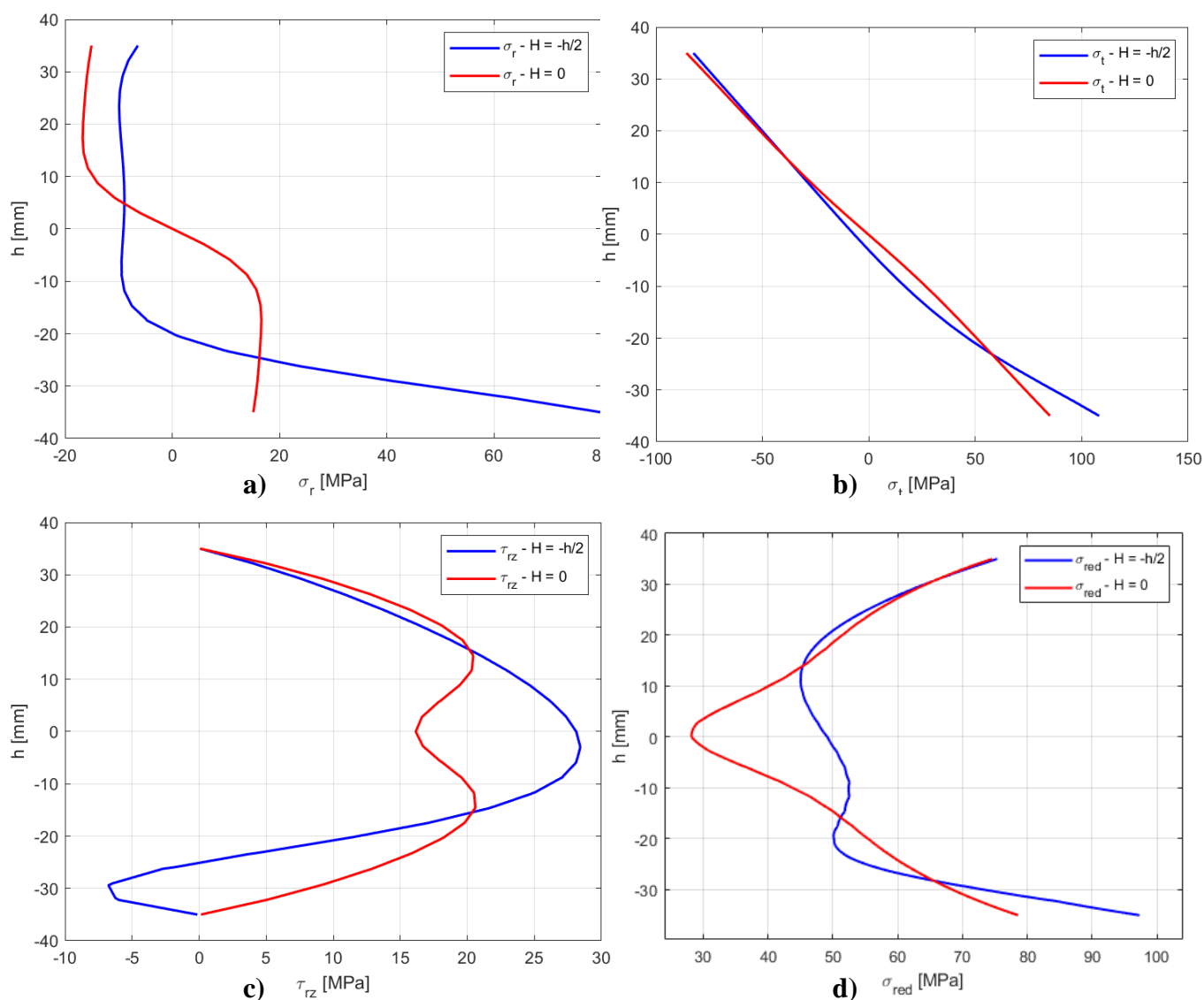
$k_K = 2, r_2 = 300 \text{ mm}$				Horní povrch $H = +h/2$		
$h$ [mm]	$2r/h$	$p$ [MPa]	$w$ [mm]	$M_{\sigma_r}$ [%]	$M_{\sigma_t}$ [%]	$M_{\sigma_{red}}$ [%]
5	120	0,03928	8,6	57,1	49,1	50,8
10	60	0,1571	4,3	25,7	8,4	9,1
20	30	0,6285	2,1	14,4	1,8	2,1
40	15	2,514	1,1	36,0	0,5	1,6
60	10	5,657	0,7	55,0	0,9	3,7
70	8,57	7,699	0,6	94,9	1,2	5,2
100	6	15,71	0,4	150,3	2,5	11,4

V tab. 5.8 jsou vidět hodnoty průměrných procentuálních odchylek napětí pro horní povrch desky. Na grafech (obr. 5.20) je závislost napětí na poloměru, která vykazuje stejný průběh u obou modelů, zase však pouze do určité vzdálenosti. Vysoké odchylky u radiálního napětí jsou způsobeny problémem statistické metody, obdobně jako v předchozích analýzách.



**Obr. 5.20:** Graf závislosti radiálního a obvodového napětí  $\sigma_r, \sigma_t$  na poloměru desky  $r$  na horním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde poměr  $2r/h$  je: a) 15; b) 8,57.

To, jak moc ovlivňujícím faktorem je pozice vazby si lze ukázat na průběhu  $\sigma_r, \sigma_t, \tau_{rz}$  a  $\sigma_{red}$  na tloušťce desky (obr. 5.21). Parametry desky jsou  $r_2 = 300 \text{ mm}, h = 70 \text{ mm}, k_K = 2$ . Závislosti byly vykreslovány na poloměru  $r = 279 \text{ mm}$  (zde působí maximální  $\tau_{rz}$ ). Varianta, která je v numerickém modelu normálně použita (vazba na  $-h/2$ ) vykazuje průběhy, které vůbec nekorrespondují s těmi teoretickými. Pokud však vazbu přemístíme v numerickém modelu na střednicovou rovinu, pak se průběhy veličin blíží více těm teoretickým. Sice jsou závislosti stále ovlivněny vazbou, jelikož se pohybují na poloměru blízkém okraji desky, ale je alespoň zachována symetričnost mezi dolním a horním povrchem. To, že jsou hodnoty všech napětí stejné na obou površích, je vlastnost, která by měla být u všech desek zachována při malých průhybech (protože nevznikají žádná membránová napětí).



**Obr. 5.21:** Grafy závislostí a) radiálního, b) obvodového, c) smykového, d) redukovaného napětí na tloušťce  $h$ , v místě desky  $r = 279 \text{ mm}$ .

V tab. 5.9 lze pozorovat, že se při přesunu vazby na střednicovou rovinu výrazně zmenšila odchylka průhybu  $M_w$ .

**Tab. 5.9:** Průměrná absolutní procentuální odchylka napětí analytického řešení od numerického na horním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP, kdy je vazba v numerickém modelu aplikována na střednicovou rovinu.

$k_K = 2, r_2 = 300 \text{ mm}$			$H = 0$	Dolní povrch $H = -h/2$		
$h \text{ [mm]}$	$2r/h$	$p \text{ [MPa]}$	$M_w \text{ [%]}$	$M_{\sigma r} \text{ [%]}$	$M_{\sigma t} \text{ [%]}$	$M_{\sigma red} \text{ [%]}$
70	8,57	7,699	9,5	144,2	0,6	5,3

Výsledky z této analýzy byly do jisté míry ovlivněny změnou poměru  $w/h$  při zvyšování tloušťky. Z tohoto důvodu museli být první dvě porovnávání modelu z řešení odstraněny. Pro získání úplného obrazu o napěťových a deformačních charakteristikách bude provedena ještě jedna analýza, kdy však bude zvyšována tloušťka desky tak, aby byl zachován poměr  $w/h = 0,05$ . Porovnání analytického a numerického řešení bude provedeno na stejném modelu desky, jako v předchozí analýze. Vazba bude uložena na dolním okraji.

**Tab. 5.10:** Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na horním a spodním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.

$w/h = 0,05, r_2 = 300 \text{ mm}$				$H = 0$	Dolní povrch $H = -h/2$			Horní povrch $H = +h/2$		
$\frac{h}{\text{[mm]}}$	$2r/h$	$p$ [MPa]	$k_K$ [-]	$M_w$ [%]	$M_{\sigma r}$ [%]	$M_{\sigma t}$ [%]	$M_{\sigma red}$ [%]	$M_{\sigma r}$ [%]	$M_{\sigma t}$ [%]	$M_{\sigma red}$ [%]
5	120	0,001165	67,4	0,02	1,6	0,8	0,8	2,1	0,8	0,9
10	60	0,01863	16,9	0,1	2,4	0,8	0,9	12,6	0,8	0,9
20	30	0,2982	4,2	1,5	4,0	1,2	1,2	13,2	0,8	1,0
40	15	4,771	1,1	6,7	7,4	3,0	2,3	36,3	0,7	1,8
60	10	24,15	0,5	16,1	11,0	4,3	4,7	53,6	0,8	3,7
70	8,57	44,74	0,3	22,3	13,0	5,6	6,4	110,1	1,0	5,0
100	6	186,3	0,2	44,2	19,2	10,4	12,4	126,8	1,9	10,6

Odchylky ukázané v tab. 5.10 jsou velmi podobné těm z předchozí analýzy. Od hodnoty  $2r/h = 10$  již redukované napětí překročí hodnotu meze kluzu, dostane se tedy do oblasti plastické deformace. Zde již nelze pracovat s lineární závislostí  $\sigma$ - $\varepsilon$ , avšak tento fakt analytické i numerické řešení nezohledňuje, proto řešení nebudou z analýzy vyloučeny.

I grafy různých závislostí jsou velmi podobné těm předchozím, proto zde nebudou zobrazeny. Lze je však nalézt v příloze k bakalářské práci.



### 5.3 Shrnutí výsledků

V této podkapitole budou shrnuty výsledky všech předchozích řešení. První analýza byla realizována v závislosti na změnách poměru  $w/h$ . Zde byla provedena 3 různá porovnání desek, jak pro spodní, tak horní povrch. V tab. 5.11 jsou vypsány poměry  $w/h$ , kdy bylo u desek dosaženo procentuální odchylky 5%, resp. 10%. Vybrala se hodnota poměru na povrchu, kde došlo k dřívějšímu dosažení konkrétních procent. V tab. 5.11 je také ke každé desce připsán poměr  $2r/h$ , aby bylo vidět, do které skupiny desek (vymezení podle Krichhoffovy teorie desek) podle tloušťky vyšetřovaný model patří. V rámci této práce budou brány v potaz pouze průměrné absolutní procentuální odchylky pro  $w$  a  $\sigma_{red}^{HMH}$ , tedy  $M_w$  a  $M_{\sigma red}$ . Průměrné absolutní procentuální odchylky pro radiální a obvodové napětí, tedy  $M_{\sigma r}$  a  $M_{\sigma t}$  byly ve většině případů ovlivněny chybou statistické metody a proto jsou z hodnocení vyloučeny.

**Tab. 5.11:** Hodnoty poměru  $w/h$ , při kterých u desky dojde k hodnotě průměrné absolutní procentuální odchylky 5 a 10%.

Deska typu	$2r/h$	$w/h$ při dosažení $M_w = 5\%$	$w/h$ při dosažení $M_w = 10\%$	$w/h$ při dosažení $M_{\sigma red} = 5\%$	$w/h$ při dosažení $M_{\sigma red} = 10\%$
A1 membrána	120	0,5	0,7	0,3	0,5
A2 tenkostěnná deska	60	0,4	0,6	0,2	0,4
A4 membrána/tenkostěnná	96	0,5	0,6	0,3	0,5

U druhé analýzy byla zvětšována tloušťka desky, čímž se postupně zmenšoval poměr  $2r/h$ . Byl testován jeden typ desky, kdy byla v prvním porovnání měněna geometrie desky při konstantní bezpečnosti k MSP podle HMH. Ve druhém porovnávání to bylo za konstantního poměru  $w/h$ . Výsledky jsou zobrazeny v tab. 5.12.

**Tab. 5.12:** Hodnoty poměru  $2r/h$ , při kterých u desky dojde k hodnotě průměrné absolutní procentuální odchylky 5 a 10%.

Deska typu	$2r/h$ při dosažení $M_w = 5\%$	$2r/h$ při dosažení $M_w = 10\%$	$2r/h$ při dosažení $M_{\sigma red} = 5\%$	$2r/h$ při dosažení $M_{\sigma red} = 10\%$
A1 Konstantní $k_K$	15	10	8,57	6
A1 Konstantní $w/h$	15	10	8,57	6

## 6. Závěr

Hlavním výstupem bakalářské práce bylo vytvoření výpočtového programu pro deformačně-napěťovou analýzu rotačně symetrických desek. Všechny desky obsahují v rovnicích rovnováhy pouze jednu neznámou, lze tedy provádět D-N analýzu z úplně uvolněného tvaru desky. Výpočetní program byl vytvořen v SW APP DESIGNER, který je součástí SW MATLAB a je určený k tvorbě aplikací s grafickým uživatelským rozhraním (GUI). Vytvořená aplikace nabízí uživateli výběr z několika typů desek, vyšetřovaných mezních stavů, možností zatížení atd. Uživatel si také může zvolit, zda chce D-N analýzu řešit v režimu přímé nebo inverzní úlohy. Ve výpočetním programu lze provést přes 2000 různých kombinací úloh.

Součástí vytvořené aplikace je možnost porovnat analytické a numerické řešení. Numerické řešení je realizováno pomocí metody konečných prvků v SW ANSYS MECHANICAL, který se po stisknutí tlačítka v aplikaci spustí v automatickém režimu na pozadí. Výsledky numerického řešení se načtou zpět do výpočetního nástroje v SW MATLAB, a provede se porovnání obou řešení. Srovnání výsledků může uživatel sledovat v GUI, a to v rámci tabulky, grafů deformačních a napěťových závislostí, nebo procentuálních odchylek analytického řešení od numerického.

Dalším cílem této práce bylo srovnat analytické a numerické řešení pro různé typy desek a definovat oblast praktické použitelnosti analytického řešení. Byl zvolen předpoklad, že teorie kruhových a mezikruhových desek je použitelná, pokud průměrné absolutní procentuální odchylky analytického řešení od numerického nepřekročí 10 %. V práci byla vymezena použitelnost Kirchhoffovy teorie desek, a to podle poměru  $a/h$  (membrány, tenkostěnné a tlustostěnné desky) a podle poměru  $w/h$  pro tenkostěnné desky (tuhé a flexibilní desky).

První analýza byla provedena na deskách, kde byla zvětšována zátěž za konstantní tloušťky, čímž se zvyšoval průhyb. První model patřil do skupiny membrán (velmi tenké desky), druhý do tenkostěnných desek a třetí byl na pomezí těchto dvou tříd.

Výsledky těchto analýz ukazují, že čím tenčí deska je, tím je vyšší poměr  $w/h$ , při kterém dojde k výraznějšímu odchýlení výsledků. K větší procentuální chybě dojde u všech vyšetřovaných modelů nejdříve u redukovaného napětí  $\sigma_{red}^{HMH}$ . U analyzované tenkostěnné desky (typ A2) se výsledky přibližně shodují s vymezením Kirchhoffovy teorie, tedy, že od poměru  $w/h = 0,3$  již nelze zanedbat membránové síly v rovině desky, které analytické řešení nezohledňuje. Tenčí desky (membrány), které nespádají svými rozměry do tenkostěnných desek, vykazují chybu 5 % již při  $w/h = 0,3$  (konkrétně u redukovaného napětí). Tyto desky by se také mohli sjednotit s vymezením Kirchhoffovy teorie. U membrán je však problém v tom, že i při relativně malém zatížení vznikají velké deformace, proto je u nich použitelnost analytického řešení značně omezena.

U druhé analýzy byla zvyšována tloušťka desky při zachování poloměru. Jak již bylo potvrzeno předchozí analýzou, membrány ( $2r/h > 80$ ) při malých hodnotách průhybu vykazují přesné výsledky. Tenkostěnné desky ( $10 < 2r/h < 80$ ) s rostoucí tloušťkou vykazují větší průměrnou procentuální odchylku analytického řešení od numerického, stále se však tato odchylka pohybuje pod 10%. Nad hodnotu 10% u této procentuální odchylky mezi řešeními se dostanou tlustostěnné desky ( $2r/h < 10$ ). V rámci tohoto typu desek je kritičtější procentuální odchylka pro průhyb, jelikož roste spolu s tloušťkou rychleji, než průměrná procentuální odchylka u redukovaného napětí. Rozdělení desek podle tloušťky v rámci Kirchhoffovy teorie lze po realizovaných analýzách považovat také za správné.

Po pár provedených porovnání modelů nelze výsledky úplně zobecnit. Každý uživatel si ale může jednoduše pomocí vytvořené aplikace ověřit, zda je desková teorie použitelná pro jeho konkrétní případ, či nikoliv.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] HORNÍKOVÁ, Jana, Jiří BURŠA a Pavel ŠANDERA. *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text* [online]. Brno: CERM, 2003 [cit. 2020-06-18]. ISBN 80-7204-268-8.
- [3] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.
- [4] VENTSEL, Eduard a Theodor KRAUTHAMMER. *Thin plates and shells: theory, analysis, and applications*. New York: Marcel Dekker, 2001. ISBN 0-8247-0575-0.
- [5] O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. Claude Louis Marie Henri Navier. *MacTutor History of Mathematics Archive* [online]. Scotland: University of St Andrews, 2000 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Navier/>
- [6] Maurice Lévy (mathématicien). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: [https://fr.wikipedia.org/wiki/Maurice\\_L%C3%A9vy\\_\(math%C3%A9maticien\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Maurice_L%C3%A9vy_(math%C3%A9maticien))
- [7] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. Dostupné z: <http://www.umat.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>
- [8] Matlab: the language of technical computing [online]. Release 14. Massachusetts: The MathWorks, 2004 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: <http://web.ee.nchu.edu.tw/~cpfan/FY92a-baseband/MATLAB-getstart.pdf>
- [9] MATLAB Central. *MathWorks* [online]. United States: The MathWorks, c1994-2020 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: [https://www.mathworks.com/matlabcentral/?s\\_tid=gn\\_mlc](https://www.mathworks.com/matlabcentral/?s_tid=gn_mlc)
- [10] What is batch processing? *IBM* [online]. United States [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: [https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/zosbasics/com.ibm.zos.zconcepts/zcon\\_whatbatch.htm](https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/zosbasics/com.ibm.zos.zconcepts/zcon_whatbatch.htm)
- [11] Using MATLAB to run (ANSYS) APDL macro code. *Youtube* [online]. Google, c2020 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=sE3NkH1m24w>. Kanál: Discite Bon.
- [12] ANSYS Help. *ANSYS* [online]. ANSYS, 2020 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: [https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/main\\_page.html](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/main_page.html)
- [13] Plate Deflection and Stress. *MITcalc* [online]. c2003-2019 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: <http://www.mitcalc.com/doc/plates/help/en/plates.htm>
- [14] NISHAWALA, VINESH V. *A STUDY OF LARGE DEFLECTION OF BEAMS AND PLATES*. New Brunswick, New Jersey, 2011. Diplomová práce. Rutgers University.
- [15] A Guide to Forecast Error Measurement Statistics and How to Use Them. *ForecastPro* [online]. Business Forecast Systems, c2019 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: <https://www.forecastpro.com/Trends/forecasting101August2011.html>
- [16] CLEMMOW, C.A. *The Flexure of Thick Circular Plates* [online]. Research Department, Woolwich: Royal Society, 1925 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1926.0129>

- [17] KELLY, Piaras. *Solid Mechanics Lecture Notes* [online]. 2013. Auckland: The University of Auckland, 2013 [cit. 2020-06-19]. Dostupné z: [http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part\\_II/06\\_PlateTheory/06\\_PlateTheory\\_10\\_LargeDeflections.pdf](http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_II/06_PlateTheory/06_PlateTheory_10_LargeDeflections.pdf)
- [18] HALAMA, Radim. Pružnost a pevnost: interaktivní studijní materiál [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2016-02-24]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost\\_pevnost\\_obraz.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_pevnost_obraz.pdf). Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni.



## Seznam symbolů, veličin a zkratk

Veličina/symbol	Jednotka	Popis
$\vec{f}$		Množina obecných napětí
$\sigma$	MPa	Normálové napětí
$\tau$	MPa	Smykové napětí
$T_\sigma$		Tenzor napětí
$u_B$	mm	Deformační posuv bodu B
$\varepsilon$	-	Délkové přetvoření
$\gamma$	-	Úhlové přetvoření
$T_\varepsilon$		Tenzor přetvoření
$E$	MPa	Modul pružnosti v tahu
$\mu$	-	Poissonova konstanta
$G$	MPa	Modul pružnosti ve smyku
$e$		Poměrná změna objemu
$\Delta V$	m <sup>3</sup>	Změna objemu
$V$	m <sup>3</sup>	Původní objem
$V'$	m <sup>3</sup>	Objem po defroamci
$\lambda$	MPa	Lamého konstanta
$h$	mm	Tloušťka desky
$\Gamma$		Střednicová plocha
$a$	mm	Charakteristický rozměr desky
$w$	mm	Průhyb desky
$u, v$	mm	Deformace v rovině desky
$\vartheta$	°	Natočení
$m_x, m_y$	N.mm/mm	Měrné ohybové momenty
$m_{xy}$	N.mm/mm	Krouticí moment
$B$	MPa.mm <sup>3</sup>	Ohybová tuhost desky
$q$	N/mm	Posouvající síla
$p$	MPa	Plošné zatížení
$\sigma_r$	MPa	Radiální napětí
$\sigma_t$	MPa	Obvodové napětí
$u_r, u_t$	mm	Radiální a obvodové posuvy
$\mathcal{F}$	N/mm	Měrná liniová síla
$F_v$	N	Osamělá síla působící ve středu desky
$m_r, m_t$	N.mm/mm	Měrná radiální a obvodový
$a, b$	mm	Rozměry obdélníkové desky
$m, n$	-	Koeficienty nekonečné řady
$f_m$	-	Funkce komplementárního řešení
$g_m$	-	Funkce partikulárního řešení
$M_r, M_t$	N.mm	Radiální a obvodový moment
$T$	N	Posouvající síla u rotačně symetrických desek
$\mathcal{T}$	N/mm	Měrná posouvající síla u rotačně

		symetrických desek
$F_z$	N	Silová výslednice spojitého měrného tlaku
$\Pi$		Potenciální energie
$W$		Napjatost
$\Omega$		Označení pro objem tělesa
$P$		Potenciál vnějšího zatížení
$N$	mm	Bázová funkce
$\delta$		Matice posuvů
$f$		Prvková matice vnějšího zatížení
$k$		Prvková matice tuhosti
$F$		Celková matice vnějšího zatížení
$K$		Celková prvková matice tuhosti
$U$		Globální matice deformačních parametrů
$r$	mm	Poloměr desky
$C, K$	-	Integrační konstanty
$M_x$	%	Průměrná absolutní procentuální odchylka MAPE
$A$		Označení typu desky

## Seznam obrázků

<b>Obr. 1.1:</b> Smyková napětí na dvou elementárních prvcích [2].....	2
<b>Obr. 1.2:</b> Posuv ve směru osy $x$ na elementárním kvádru [4].....	3
<b>Obr. 1.3:</b> Úhlové přetvoření $\gamma_{xy}$ na elementárním kvádru [4].....	3
<b>Obr. 1.4:</b> Průmět horní stěny elementárního kvádru do roviny $xy$ [4].....	3
<b>Obr. 1.5:</b> Tahový diagram s <b>a)</b> nelineární $\sigma$ - $\epsilon$ závislostí, <b>b)</b> lineární $\sigma$ - $\epsilon$ závislostí [2].....	6
<b>Obr. 1.6:</b> Elementární prvek a princip superpozice [3].....	7
<b>Obr. 2.1:</b> Tenkostěnné těleso [3].....	9
<b>Obr. 2.2:</b> Vnitřní silové působení a napětí na obecné desce [4].....	11
<b>Obr. 2.3:</b> Elementární prvek a jeho <b>a)</b> deformace, <b>b)</b> řezy a úhlová přetvoření [3].....	13
<b>Obr. 2.4:</b> Napětí na elementárním prvku [3].....	14
<b>Obr. 2.5:</b> Posuvy na meridiánovém řezu desky [3].....	14
<b>Obr. 2.6:</b> Zatížení a vazby na kruhové a mezikruhové desce.....	15
<b>Obr. 3.1:</b> Uvolněný elementární prvek [3].....	17
<b>Obr. 3.2:</b> LVVÚ na střednicové rovině elementárního prvku [3].....	17
<b>Obr. 3.3:</b> Obdélníková deska podepřená po celém obvodu [4].....	19
<b>Obr. 3.4:</b> Obdélníková deska podepřená na dvou protilehlých stranách.....	21
<b>Obr. 3.5:</b> Síť MKP vetknutého prutu [7].....	23
<b>Obr. 3.6:</b> Osově namáhaný prutový prvek [7].....	23
<b>Obr. 3.7:</b> Srovnání analytického a numerického řešení pro <b>a)</b> posuv, <b>b)</b> posuv [7].....	25
<b>Obr. 4.1:</b> APP DESIGNER – Design View.....	26
<b>Obr. 4.2:</b> APP DESIGNER – Code View.....	26
<b>Obr. 4.3:</b> Aplikace po spuštění.....	27
<b>Obr. 4.4:</b> Meridiánový řez u různých typů kruhových a mezikruhových desek [3].....	27
<b>Obr. 4.5:</b> Meridiánový řez zatížené <b>a)</b> kruhové desky vyrobené z houževnatého materiálu, <b>b)</b> mezikruhové desky vyrobené z křehkého materiálu.....	28
<b>Obr. 4.6:</b> Uvolňování desky typu <b>A1</b> .....	28
<b>Obr. 4.7:</b> Uvolňování desky typu <b>A6</b> .....	29
<b>Obr. 4.8:</b> Kompletní grafické uživatelské rozhraní (GUI) vytvořeného výpočetního nástroje.....	32
<b>Obr. 4.9:</b> Grafické uživatelské rozhraní pro <b>a)</b> část A, <b>b)</b> část B, <b>c)</b> část C dle obr. 4.8. ....	32-33
<b>Obr. 4.10:</b> Prvek PLANE182 v kartézském a přirozeném souřadnicovém systému [7]...	34
<b>Obr. 4.11:</b> Prvek PLANE183 [7].....	34
<b>Obr. 4.11:</b> Ukázka APDL macro kódu pro <b>a)</b> element, materiál, geometrii a síť <b>b)</b> okrajové podmínky.....	35
<b>Obr. 5.1:</b> Meridiánový řez deskou typu <b>A1</b> , zatíženou tlakem $p$ .....	36
<b>Obr. 5.2:</b> Graf závislosti radiálního a obvodového napětí $\sigma_r, \sigma_t$ na poloměru desky $r$ na spodním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde poměr $w/h$ je: <b>a)</b> 0,1; <b>b)</b> 0,3; <b>c)</b> 0,5; <b>d)</b> 0,7.....	38-39
<b>Obr. 5.3:</b> Graf závislosti redukovaného napětí $\sigma_{red}$ podle HMM na poloměru desky $r$ na spodním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde poměr $w/h$ je: <b>a)</b> 0,1; <b>b)</b> 0,3; <b>c)</b> 0,5; <b>d)</b> 0,7.....	40-41
<b>Obr. 5.4:</b> Graf závislosti průhybu $w$ na poloměru desky $r$ v místě střednicové roviny pro analytické a numerické řešení, kde poměr $w/h$ je: <b>a)</b> 0,1; <b>b)</b> 0,3; <b>c)</b> 0,5; <b>d)</b> 0,7.....	42-43



<b>Obr. 5.5:</b> Graf závislosti radiálního posuvu $u_r$ na poloměru $r$ pro předpoklad velkých a malých deformací.....	43
<b>Obr. 5.6:</b> Obecné znázornění průběhu napětí po tloušťce desky u analytického a numerického modelu využívajícího velké deformace.....	44
<b>Obr. 5.7:</b> Graf závislosti radiálního napětí $\sigma_r$ na výšce $h$ v nejkritičtějších místech desky ( $r = 0$ ) pro analytické a numerické řešení, kde poměr $w/h$ je: <b>a)</b> 0,1; <b>b)</b> 0,3; <b>c)</b> 0,5; <b>d)</b> 0,7; <b>e)</b> 3.....	45
<b>Obr. 5.8:</b> Meridiánový řez deskou typu <b>A2</b> , zatíženou tlakem $p$ .....	46
<b>Obr. 5.9:</b> Graf závislosti radiálního a obvodového napětí $\sigma_r, \sigma_t$ na poloměru desky $r$ na spodním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde $w/h = 0,3$ .....	47
<b>Obr. 5.10:</b> Graf závislosti radiálního a obvodového napětí $\sigma_r, \sigma_t$ na poloměru desky $r$ pro analytické a numerické řešení, kde $w/h = 0,5$ pro povrch <b>a)</b> spodní, <b>b)</b> horní.....	48
<b>Obr. 5.11:</b> Graf závislosti redukovaného napětí $\sigma_{red}$ podle HMM na poloměru desky $r$ pro analytické a numerické řešení, kde $w/h = 0,5$ pro povrch <b>a)</b> spodní, <b>b)</b> horní.....	49
<b>Obr. 5.12:</b> Graf závislosti redukovaného napětí $\sigma_{red}$ podle HMM na poloměru desky $r$ , na dolní rovině pro analytické a numerické řešení, kde $w/h = 0,5$ , s upravenou vazbou vetknutí.....	49
<b>Obr. 5.13:</b> Meridiánový řez deskou typu <b>A4</b> , zatíženou linií silou $\mathcal{F}_1$ a radiálním momentem $m_1$ .....	50
<b>Obr. 5.14:</b> Graf závislosti radiálního a obvodového napětí $\sigma_r, \sigma_t$ na poloměru desky $r$ pro analytické a numerické řešení, kde $w/h = 0,5$ , pro povrch <b>a)</b> spodní, <b>b)</b> horní.....	51
<b>Obr. 5.15:</b> Graf závislosti radiálního a obvodového napětí $\sigma_r, \sigma_t$ na poloměru desky $r$ pro analytické a numerické řešení, kdy je moment aplikován <b>a)</b> po celé tloušťce, <b>b)</b> na části tloušťky.....	52
<b>Obr. 5.16:</b> Graf závislosti redukovaného napětí $\sigma_{red}$ podle HMM na poloměru desky $r$ pro analytické a numerické řešení, kde $w/h = 0,5$ pro povrch <b>a)</b> spodní, <b>b)</b> horní.....	52-53
<b>Obr. 5.17:</b> Graf závislosti průhybu $w$ na poloměru desky $r$ v místě střednicové roviny pro analytické a numerické řešení, kde poměr $2r/h$ je: <b>a)</b> 15; <b>b)</b> 8,57.....	55
<b>Obr. 5.18:</b> Graf závislosti radiálního a obvodového napětí $\sigma_r, \sigma_t$ na poloměru desky $r$ na spodním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde poměr $2r/h$ je: <b>a)</b> 15; <b>b)</b> 8,57..	56-57
<b>Obr. 5.19:</b> Graf závislosti smykového napětí $\tau_{zr}$ na poloměru desky $r$ .....	57
<b>Obr. 5.20:</b> Graf závislosti radiálního a obvodového napětí $\sigma_r, \sigma_t$ na poloměru desky $r$ na horním povrchu pro analytické a numerické řešení, kde poměr $2r/h$ je: <b>a)</b> 15; <b>b)</b> 8,57.....	58
<b>Obr. 5.21:</b> Grafy závislostí <b>a)</b> radiálního, <b>b)</b> obvodového, <b>c)</b> smykového, <b>d)</b> redukovaného napětí na tloušťce $h$ , v místě desky $r = 279 \text{ mm}$ .....	59

## Seznam tabulek

<b>Tab. 4.1:</b> Okrajové podmínky a podmínky spojitosti pro různé typy nezatížených desek....	31
<b>Tab. 5.1:</b> Průměrná absolutní procentuální odchylka analytického řešení od numerického pro průhyb a napětí na dolním povrchu za předpokladu velkých a malých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.....	37
<b>Tab. 5.2:</b> Maximální hodnoty $\sigma_r$ , resp. $\sigma_t$ ve středu desky na dolním ( $h = -2,5 \text{ mm}$ ) a horním ( $h = 2,5 \text{ mm}$ ) povrchu pro analytické a numerické řešení.....	44
<b>Tab. 5.3:</b> Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na horním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.....	46
<b>Tab. 5.4:</b> Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na horním a spodním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.....	47
<b>Tab. 5.5:</b> Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na horním a spodním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.....	50
<b>Tab. 5.6:</b> Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na spodním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.....	54
<b>Tab. 5.7:</b> Maximální průhyb analytického řešení, rozdíl mezi numerickým a analytickým $w_{max}$ , průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu analytického řešení od numerického na spodním povrchu.....	56
<b>Tab. 5.8:</b> Průměrná absolutní procentuální odchylka napětí analytického řešení od numerického na horním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.....	58
<b>Tab. 5.9:</b> Průměrná absolutní procentuální odchylka napětí analytického řešení od numerického na horním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP, kdy je vazba aplikována na střednicovou rovinu.....	60
<b>Tab. 5.10:</b> Průměrná absolutní procentuální odchylka průhybu a napětí analytického řešení od numerického na horním a spodním povrchu za předpokladu velkých deformací u numerického řešení využívajícího MKP.....	60
<b>Tab. 5.11:</b> Hodnoty poměru $w/h$ , při kterých u desky dojde k hodnotě průměrné absolutní procentuální odchylce 5 a 10%.....	61
<b>Tab. 5.12:</b> Hodnoty poměru $2r/h$ , při kterých u desky dojde k hodnotě průměrné absolutní procentuální odchylce 5 a 10%.....	61

## Seznam příloh

Příloha A – **Výpočetní nástroj pro D-N analýzu kruhových a mezikruhových desek.rar**

Obsahuje:

- Výpočetní program pro verze 2019 a novější: **APP\_DESKA\_2019.mlapp**
- Výpočetní program pro verze 2018 a starší: **APP\_DESKA\_STARSI.mlapp**
- APDL macro kód: **BATCH\_NOVY.mac**
- Ilustrace pro GUI aplikace: **TYP\_DESKY.jpg, ZATIZENI.jpg**
- Textový soubor k umožnění funkce ANSYS v batch módu: **ANSYS.txt**

Příloha B – **Grafy.rar**

Obsahuje: Grafy závislostí, které nebyly zobrazeny v bakalářské práci